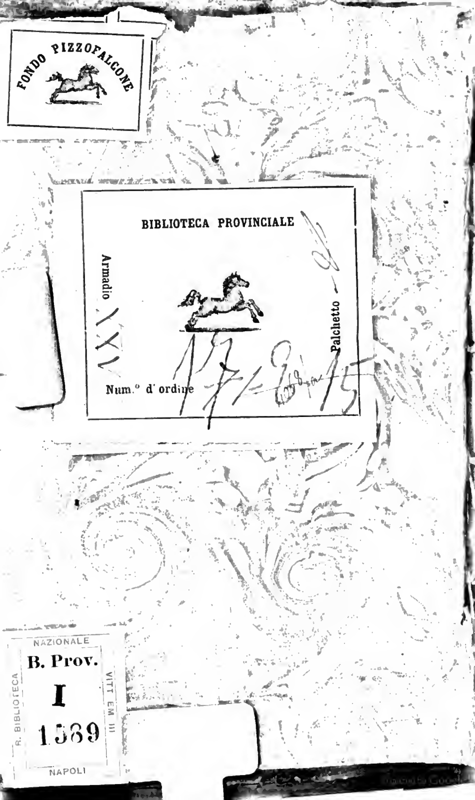






TRAITÉ
THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTAL
D'HYDRODYNAMIQUE.

Par M. l'Abbé BOSSUT, *de l'Académie Royale des Sciences, Honoraire-Associé-libre de l'Académie royale d'Architecture, de l'Institut de Bologne, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Péterſbourg, de l'Académie Royale des Sciences de Turin, de la Société provinciale d'Utrecht, Examinateur des Élèves du Corps royal du Génie, Inſpecteur général des Machines & Ouvrages Hydrauliques des Bâtimens du Roi.*



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVI.

TABLE DES OBJETS

Contenus dans ce Volume.

SECONDE PARTIE.

Fin de la Table.

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

Les Anciens ont porté fort loin la pratique des machines. On trouve dans les temps les plus reculés quelques veſtiges des moyens qu'ils ſavoient employer pour mouvoir de lourds fardeaux avec de foibles agens; mais ils n'ont eu pendant pluſieurs ſiècles d'autres guides que l'expérience & le génie d'une Mécanique naturelle. Archimède, qui vivoit ſeulement deux cents cinquante ans avant Jéſus-Chriſt, eſt le premier qui ait trouvé le principe général de l'équilibre du lévier: principe auquel on peut rapporter tout le fond de la Statique élémentaire. Il n'a rien écrit ſur la théorie du mouvement, qui demandoit une Géométrie plus profonde que celle de ſon temps, & dont la découverte appartient entièrement aux Modernes.

Si la ſcience de la Mécanique ordinaire a été ſi lente à ſe former, celle de l'Hydrodynamique a dû l'être bien davantage; car en ſuppoſant même qu'on fût parvenu à déterminer géométriquement l'équilibre ou le mouvement d'un ſyſtème quelconque de corps ſolides, on ne pouvoit pas appliquer immédiatement la méthode



à une maſſe fluide, dont on ne connoit les élémens, ni pour le nombre, ni pour la figure : il falloit de plus ici que l'expérience ou une propriété particulière aux fluides, vînt prêter ſon appui à la Mécanique & à la Géométrie. Archimède en fit la remarque, & c'eſt encore lui qui a poſé les ſondemens de l'Hydroſtatique. Dans ſon ouvrage *de humido inſidentibus*, il établit qu'un point quelconque d'une maſſe fluide en équilibre eſt également preſſé en toutes ſortes de ſens ; & il examine en conſéquence les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'un corps ſolide, flottant ſur un fluide, prenne & conſerve la ſituation d'équilibre. Il applique au triangle, au cône & au paraboloïde cette théorie générale, l'un des plus beaux monumens de ſon génie.

Deux Mathématiciens de l'école d'Alexandrie, Cteſibius & Héron ſon diſciple, environ un ſiècle après Archimède, inventèrent pluſieurs machines hydrauliques très-ingénieuſes, dont le jeu dépendoit du reſſort ou du poids de l'air : telles ſont, par exemple, les *pompes* qui ſont ſervir l'air de véhicule à l'action de la force motrice ; la *fontaine de compreſſion*, appelée encore aujourd'hui la *fontaine de Héron*, dans laquelle l'eau s'élève au-deſſus de ſon niveau, en vertu de la preſſion de l'air que l'on y a d'abord condenſé ; le *ſyphon* à branches inégales où l'eau monte par la plus courte, quand

on y a fait le vide, & s'écoule par la plus longue. Mais si l'on admire les effets de toutes ces machines, on voit avec une surprise mêlée de peine, que les inventeurs en ignoroient entièrement les véritables causes, & qu'ils les attribuoient à une prétendue horreur de la Nature pour le vide.

On fait remonter jusqu'aux Égyptiens la manière de mesurer le temps par des *clepsydres* d'eau. Ctesibius nous a laissé une machine de ce genre, où le mouvement étoit produit & entretenu par des moyens d'une recherche très-subtile, quoiqu'elle ne fût pas d'ailleurs propre à donner la mesure du temps avec une certaine précision.

En nous renfermant toujours dans le cercle de l'Hydrodynamique, nous voyons que les Anciens ont employé, à quelques différences près, la plupart des machines dont nous nous servons encore aujourd'hui pour élever l'eau: je veux dire la *vis* qui porte le nom d'Archimède, le *tympan*, les chaînes à *godets*, les *chapelets*, &c. Une épigramme de l'anthologie grecque a donné lieu de croire que les moulins à eau ont été trouvés au temps d'Auguste; mais Vitruve qui vivoit sous ce Prince, ne dit point dans la description qu'il donne de ces moulins, qu'ils fussent une invention récente; & vraisemblablement ils étoient déjà connus dans les temps antérieurs.

Les moulins à vent ſont venus beaucoup plus tard : quelques Auteurs nous en attribuent l'uſage dès le ſixième ſiècle ; d'autres prétendent que les Croiſades nous les ont apportés de l'Orient où ils étoient déjà très-anciens, & où on les emploie de préférence aux moulins à eau, parce que les rivières & les ſources ſont rares & peu abondantes dans ces pays. Sous nos Rois de la première Race on ſe ſervoit fréquemment en France de moulins à bras, malgré les avantages des moulins à eau.

Toutes ces machines ont été imaginées avant que la théorie du mouvement des fluides fût connue. On attribue à Sextus-Julius-Frontinus (vulgairement nommé *Frontin*), les premières notions qu'on ait eues de cette théorie. Inſpecteur des fontaines publiques à Rome, ſous les empereurs Nerva & Trajan, il a laiſſé, à ce ſujet, un ouvrage intitulé *de aquæ ductibus urbis Romæ Commentarius :* il y conſidère le mouvement des eaux qui coulent dans des canaux, ou qui s'échappent par des ouvertures, des vaſes où elles ſont contenues : il décrit d'abord les aqueducs de Rome, cite les noms de ceux qui les ont fait conſtruire, & les époques de leurs conſtructions. Enſuite il fixe & compare enſemble les meſures ou modules dont on ſe ſervoit alors à Rome pour déterminer les dépenſes des ajutages. De-là il paſſe aux moyens de diſtribuer les eaux d'un

aqueduc ou d'une fontaine. Il fait des obſervations vraies ſur ces différens objets; par exemple, il a vu que le produit d'un ajutage ne doit pas ſeulement s'évaluer par la grandeur de cet ajutage, & qu'il faut encore tenir compte de la hauteur du réſervoir: conſidération très-ſimple, & cependant négligée par quelques Fontainiers modernes. Il a ſenti pareillement qu'un tuyau deſtiné à dériver en partie l'eau d'un aqueduc, doit avoir, ſelon les circonſtances, une poſition plus ou moins oblique par rapport au cours du fluide, &c. Mais on ne trouve d'ailleurs aucune préciſion géométrique dans ſes réſultats; il n'a point connu la vraie loi des vîteſſes, relativement aux hauteurs des réſervoirs.

Les Lettres & les Arts étoient déjà dans la décadence au temps de Frontin; & bientôt l'Europe fut plongée dans la plus affreuſe barbarie. Cette nuit profonde dura près de treize cents ans. La Poëſie & l'Éloquence y jetèrent par intervalles quelques éclairs, trop foibles pour en diſſiper l'obſcurité. L'eſprit humain ne ſortit de cet engourdiſſement qu'au ſiècle de Médicis. On vit alors la foule des arts agréables, encouragés & protégés par de ſimples particuliers, renaître en Italie, & y briller avec le même éclat qu'ils avoient eu autrefois dans les beaux jours de la Grèce & de Rome. Peu-à-peu ils pénétrèrent

chez les peuples voiſins. La Philoſophie eut une marche plus tardive. Je parle ſur-tout de cette branche qui, à l'aide du Calcul & de la Géométrie, ſe propoſe d'expliquer avec certitude & avec évidence les phénomènes de la Nature. Ennemie des ornemens, cherchant le vrai dans toute ſa ſimplicité, elle avoit peu d'attraits pour des eſprits trop ſenſibles peut-être aux charmes de la Poëſie & de la Peinture, & accoutumés à ne recueillir, pour ainſi dire, que les fleurs de l'imagination.

Cependant le renouvellement des Sciences ſuivit par degrés celui des Lettres & des Arts. L'Italie eut encore la gloire des premiers ſuccès dans cette eſpèce de régénération de l'entendement humain. Galilée l'un des plus grands génies qu'elle ait produit, mérita d'être appelé le père de la Philoſophie moderne. Il dut également ce titre à ſes découvertes aſtronomiques, & à ſa théorie de l'accélération des graves: il ſoupçonna la peſanteur de l'air; & ce ſoupçon communiqué à Toricelli le plus illuſtre diſciple, fut comme un trait de lumière qui conduiſit celui-ci à démontrer réellement la peſanteur de l'air, par une foule d'expériences trés-ingénieuſes, & à donner la véritable explication de l'aſcenſion du mercure dans le baromètre, & de l'eau dans les pompes.

Le mouvement des eaux attira l'attention de Caſtelli, autre diſciple de Galilée. Dans un petit Traité, publié en 1628, Caſtelli explique très-bien quelques phénomènes du mouvement des eaux courantes ; mais il ſe trompe dans la meſure des vîteſſes qu'il fait proportionnelles aux hauteurs des réſervoirs.

Toricelli, dont nous venons de parler, fut plus heureux. En voyant que l'eau d'un jet qui ſort par un petit ajutage, s'élance verticalement preſque à la hauteur du réſervoir, il penſa qu'elle devoit avoir la même vîteſſe que ſi elle étoit tombée, par ſa gravité, de cette hauteur ; d'où il conclut, conformément à la théorie de ſon maître, qu'abſtraction faite de la réſiſtance des obſtacles, les vîteſſes des écoulemens ſuivoient la raiſon ſous-doublée des preſſions. Cette idée fut confirmée par des expériences que Raphaël Magiotti fit dans ce temps-là ſur les produits de différens ajutages, ſous différentes charges d'eau. Toricelli publia ſa découverte en 1643, à la ſuite d'un petit Traité intitulé : *De motu gravium naturaliter accelerato.* Elle fit de l'Hydraulique une ſcience toute nouvelle : néanmoins elle n'a lieu en rigueur que pour les fluides qui s'écoulent, comme cela arrive ordinairement, par de petits orifices. Lorſque l'orifice eſt fort grand, le mouvement du fluide ſuit une autre loi beaucoup plus compoſée.

A la mort de Pascal, on trouva dans ses papiers un *Traité de l'équilibre des Liqueurs*, qui fut publié en 1663. Cet ouvrage, vraiment original, est le premier où les loix de l'Hydrostatique aient été démontrées en détail & d'une manière claire & simple, par la voie du raisonnement & de l'expérience; mais il n'y est point parlé du mouvement des fluides.

Parmi les Auteurs qui ont écrit sur ce dernier sujet, & qui ont mis le Théorème de Toricelli en usage, Mariotte mérite d'être cité avec distinction. Né avec un talent rare pour imaginer & exécuter des expériences, ayant eu occasion d'en faire un grand nombre sur le mouvement des eaux à Versailles, à Chantilly & dans plusieurs autres endroits, il composa sur cette matière un Traité qui ne fut imprimé qu'après sa mort, arrivée en 1686. Il s'y est trompé en quelques endroits; il n'a fait qu'effleurer plusieurs questions; il n'a pas connu le déchet occasionné dans le produit d'un ajutage, par la contraction à laquelle la veine fluide est sujette, lorsque cet ajutage est percé dans une mince paroi. Malgré ces défauts, son ouvrage a été fort utile, & il a beaucoup contribué aux progrès de l'Hydraulique pratique.

En 1687, Newton publia ses *Principes Mathématiques :* ouvrage où sont traitées les princi-

pales questions de la Philosophie naturelle. Le problème du mouvement des fluides n'y est pas oublié. Pour nous faire quelque idée de la méthode que Newton emploie pour le résoudre, représentons-nous un vase cylindrique vertical, percé à son fond d'une ouverture par laquelle l'eau s'échappe; concevons que ce vase reçoive par en-haut autant d'eau qu'il en dépense, & que par conséquent il demeure toujours plein à même hauteur. Cela posé, Newton partage la masse entière de l'eau en deux parties. L'une a la figure d'un solide produit par la révolution d'une hyperbole du cinquième degré autour de la droite verticale qui passe par le centre du trou; & ce solide a pour deux de ses élémens le trou même & la surface supérieure du fluide: l'autre partie est le reste de l'eau contenue dans le cylindre. L'auteur imagine ensuite que les tranches horizontales de l'hyperboloïde sont seules en mouvement, & que le reste de la masse demeure en repos. Il y a donc ainsi, au milieu du fluide, une espèce de *cataracte* qui se renouvelle sans cesse, tandis que l'eau latérale reste en repos. En comparant le résultat de cette théorie avec la quantité de l'écoulement, déterminée par l'expérience, Newton se hâta de conclure que la vîtesse, au sortir de l'orifice, n'étoit dûe qu'à la moitié de la hauteur de l'eau dans le réservoir. Mais

il sentit lui-même dans la suite, que cette conséquence ne pouvoit pas se concilier avec la hauteur à laquelle les jets d'eau s'élèvent naturellement. Il n'avoit pas vu d'abord l'effet de la contraction; il le vit dans sa seconde édition qui parut en 1714. Sans abandonner le fond de sa théorie, il regarda la section de la veine contractée, comme le vrai orifice par lequel l'écoulement doit être censé se faire; & la vîtesse en cet endroit, comme dûe à la hauteur correspondante de l'eau dans le réservoir. Par ce moyen, sa théorie devint plus conforme à l'expérience; mais elle n'en parut pas pour cela établie assez solidement. Elle porte en effet, sur des principes arbitraires & nullement démontrés. La formation de la cataracte est contraire aux loix de l'Hydrostatique & à l'expérience, qui concourent à faire voir que lorsqu'un vase donne de l'eau par une ouverture, toutes les particules se dirigent vers cette ouverture.

Dans cette histoire abrégée des inventeurs, je ne compte pas M. Varignon, qui n'a déterminé que d'une manière très-imparfaite la vîtesse des écoulemens; ni M. Guglielmini qui, dans sa *Mesure des eaux courantes*, & dans son *Traité sur la nature des Fleuves*, excellent quant à la partie physique & pratique, n'a employé d'autre théorie que celle de Toricelli; ni une foule d'autres Écrivains qui n'ont fait que copier leurs prédécesseurs.

Tel

Tel étoit à peu-près l'état de l'Hydraulique, lorſque le célèbre M. Daniel Bernoulli, après avoir donné ſur ce ſujet quelques eſſais imprimés parmi les Mémoires de l'Académie de Péterſbourg, mit au jour ſon *Hydrodynamique*, en 1738. Comme on ne connoît ni le nombre ni la figure des molécules fluides, & qu'il n'eſt par conſéquent pas poſſible de déterminer rigoureuſement le mouvement de chacune d'elles en particulier, M. Bernoulli partage le fluide par maſſes qui ſe meuvent ſuivant la même loi. Il fait deux ſuppoſitions qui lui paroiſſent conformes à l'expérience, & propres à fonder une théorie générale & ſuffiſamment exacte du mouvement des fluides; la première, que la ſurface d'un fluide contenu dans un vaſe qui ſe vide par une ouverture, demeure toujours horizontale; la ſeconde, qu'en imaginant toute la maſſe fluide partagée en une infinité de tranches horizontales de même volume, ces tranches demeurent contiguës les unes aux autres, & que tous leurs points s'abaiſſent verticalement avec des vîteſſes qui ſuivent la raiſon inverſe de leurs largeurs ou des ſections horizontales du réſervoir. Enſuite, pour déterminer le mouvement d'une tranche quelconque, il emploie le principe de la conſervation des forces vives; ce qui eſt permis. Car les tranches fluides agiſſent les unes ſur les autres ſans ſe choquer, & par

degrés insensibles, à peu près comme des corps solides, formant un même système & agissant les uns sur les autres par des fils ou des léviers, se partagent une quantité déterminée de mouvement. Or on sait, quoiqu'on n'en ait pas cependant de démonstration générale, que le principe en question a lieu dans ces sortes de cas. M. Bernoulli parvient ainsi à des solutions très-élégantes par la marche du calcul & par la simplicité des résultats. Il applique les Théorèmes généraux à des exemples choisis: par-tout une profonde science de l'analyse, une physique sûre, puisée dans la nature des choses, employant le calcul au besoin & jamais pour la pompe. En un mot, cet ouvrage est une des plus belles & des plus sages productions du génie mathématique.

M. Maclaurin & M. Jean Bernoulli, trouvant que le principe de la conservation des forces vives n'étoit pas assez direct pour servir de base à la théorie du mouvement des fluides, résolurent le problème par d'autres méthodes qu'ils crurent dériver plus naturellement des premières loix de la Mécanique. Ils parvinrent d'ailleurs aux mêmes résultats que M. Daniel Bernoulli. On a reproché quelques obscurités à leurs méthodes; mais je n'entrerai pas dans cette discussion. Les recherches de M. Maclaurin sur ce sujet, parurent en 1742, dans son *Traité des Fluxions;*

& l'*Hydraulique* de M. Jean Bernoulli parut en 1743, dans le recueil de ses ouvrages.

Il étoit réservé à M. d'Alembert de porter dans la théorie de l'Hydrodynamique la même lumière dont il avoit éclairé la mécanique des corps solides. Le principe général qu'il venoit de découvrir pour trouver le mouvement des corps solides qui agissent les uns sur les autres, lui servit aussi, en 1744, dans son *Traité des fluides*, à résoudre de la manière la plus simple & la plus élégante, les problèmes qui concernent l'équilibre & le mouvement des fluides. L'auteur fait les mêmes suppositions que M. Daniel Bernoulli : à cela près, il établit son calcul tout autrement ; il considère à chaque instant le mouvement actuel d'une tranche, comme composé du mouvement qu'elle avoit dans l'instant précédent, & d'un mouvement qu'elle a perdu : les loix de l'équilibre entre les mouvemens perdus, lui donnent les équations qui représentent le mouvement du fluide. M. d'Alembert résoud par-là avec facilité, non-seulement les problèmes des Auteurs qui l'ont précédé, mais il en donne un grand nombre d'autres qui sont entièrement nouveaux & très-difficiles. Son ouvrage est donc original à plusieurs égards par le fond des choses même ; il l'est du moins d'un bout à l'autre, par la méthode que l'auteur a employée : méthode

qui fera à jamais époque dans la ſcience du mouvement, dont elle réduit toutes les loix à celles de l'équilibre.

Quoique l'Hydrodynamique eût ainſi acquis un haut degré de perfection, elle étoit néanmoins aſtreinte à l'hypothèſe, que les tranches du fluide conſervent leur parallélisme, ou que tous les points d'une même tranche ſe meuvent, ſuivant une ſeule & même direction. Il étoit à deſirer qu'on pût exprimer par des équations, le mouvement d'un point du fluide dans un ſens quelconque. M. d'Alembert trouva ces équations d'après ces deux principes; qu'un canal rectangulaire, pris dans une maſſe fluide en équilibre, eſt lui-même en équilibre; & qu'une portion du fluide, en paſſant d'un endroit à l'autre, conſerve le même volume lorſque le fluide eſt incompreſſible, ou ſe dilate ſuivant une loi donnée lorſque le fluide eſt élaſtique. Il publia cette méthode très-profonde & très-ingénieuſe, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des fluides*, imprimé en 1752. Il l'a encore perfectionnée depuis dans ſes *Opuſcules mathématiques*. M. Euler a traité de ſon côté ce problème avec plus d'étendue & plus de généralité dans pluſieurs Mémoires imprimés parmi ceux des Académies de Berlin & de Péterſbourg. M. de la Grange en a fait auſſi le ſujet d'une profonde Diſſertation *(Acad. de Berlin, 1781)*.

Ces grands Géomètres semblent avoir épuisé toutes les ressources qu'on peut tirer de l'analyse pour déterminer le mouvement des fluides. Malheureusement leurs formules sont si composées, par la nature de la chose, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités géométriques, très-précieuses en elles-mêmes; & non comme des symboles propres à peindre l'image sensible du mouvement actuel & physique d'un fluide.

Il y a des Sciences qui, par leur objet, ne sont destinées qu'à servir d'aliment à la curiosité ou à l'inquiétude de l'esprit humain : il en est d'autres qui doivent sortir de cet ordre purement intellectuel pour s'appliquer aux besoins de la Société : telle est en particulier l'Hydrodynamique. La détermination de la quantité de liqueur qui s'écoule par une ouverture proposée, la recherche du mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la Nature, la connoissance des forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, &c, sont des objets d'une utilité continuelle dans la pratique. Il est donc indispensable de perfectionner la science dont il s'agit; & s'il y a des questions où la Géométrie n'offre pour cela que des secours trop pénibles ou même impuissans, il faut tâcher de suppléer à son défaut par la voie de l'expérience. La chose n'est pas impossible : des faits multipliés, analysés avec

attention, & ramenés, autant qu'il eſt poſſible, à des loix générales, peuvent compoſer une eſpèce de théorie, dépourvue, à la vérité, de la rigueur géométrique, mais ſimple, lumineuſe & uſuelle. C'eſt dans cette vue que j'ai entrepris le Traité qu'on va lire: j'en avois formé le projet pendant que j'étois profeſſeur de Mathématiques à l'École royale du Génie à Mézières. Le devoir de cette place m'obligeoit d'enſeigner aux jeunes Ingénieurs la mécanique des fluides, qui eſt eſſentielle à leur état. Je leur dictois quelques eſſais qui n'étoient pas deſtinés à devenir publics; je ſentois l'inſuffiſance de la théorie en pluſieurs points, & je voulois conſulter l'expérience avant que de commencer un corps d'ouvrage. Mes idées ſur cet important objet furent goûtées par les hommes éclairés & zélés pour le bien, qui avoient l'adminiſtration de l'École du Génie. M. le duc de Choiſeul, alors Miniſtre au département de la guerre, accorda des fonds pour faire des expériences: j'en fis, je méditai, & je publiai, en 1771, un nouveau traité d'Hydrodynamique, qu'on n'a pas regardé comme inutile & comme une répétition de ceux qui avoient déjà paru.

Ce Traité eſt diviſé en deux parties, l'une théorique, l'autre expérimentale. Depuis la première édition, j'y ai fait un ſi grand nombre

l'additions de toute eſpèce, que j'ai été obligé l'en changer ici preſque entièrement la forme, & le faire graver de nouvelles planches. Je donne aujourd'hui la première Partie, c'eſt-à-dire, la héorie de l'Hydroſtatique & de l'Hydraulique. Mon deſſein étoit d'y joindre la partie expérimentale; mais le deſir de ſatisfaire, du moins autant que je puis, à l'empreſſement de pluſieurs perſonnes qui demandent cet Ouvrage, me forcent de publier d'abord le premier volume, le ſeul qui ſoit prêt à paroître : on imprime le ſecond.

Les loix primordiales de l'Hydroſtatique étant fort ſimples, fort connues, & ayant été confirmées d'ailleurs par une infinité d'expériences, il ne me reſtoit qu'à les développer avec méthode & avec un détail ſuffiſant pour en faciliter l'uſage : c'eſt à quoi je me ſuis attaché. Celles de l'Hydraulique ſont beaucoup plus compliquées, & préſentent ſouvent des difficultés inſurmontables à la mécanique & à l'analyſe. J'ai fait tous mes efforts pour établir clairement & ſimplement des principes théoriques, dont on pût retirer quelqu'utilité.

Dans la multitude des queſtions relatives à l'équilibre & au mouvement des fluides que mon ſujet contient, il y en a pluſieurs qui n'avoient pas encore été examinées; d'autres ne l'avoient été que d'une manière imparfaite & ſous des

rapports presque entièrement étrangers à la pratique. Mon ouvrage aura donc à cet égard le mérite de la nouveauté, si j'ai rempli mon intention.

Le Public a reçu avec indulgence les premiers Essais de ce Traité ; je lui demande les mêmes bontés pour cette nouvelle édition à laquelle j'ai apporté tous mes soins : il a déjà remarqué sans doute, & il verra également ici, qu'en exposant mes propres recherches, je n'ai laissé échapper aucune occasion de rendre justice aux découvertes des Auteurs qui m'ont précédé dans cette carrière.

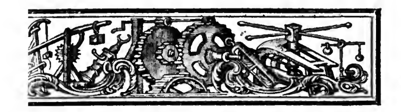
EXTRAIT DES REGISTRES

De l'Académie Royale des Sciences.

M. DU SÉJOUR & moi, qui avions été nommés pour examiner le *Traité théorique & expérimental d'Hydrodynamique* de M. l'Abbé Bossut, en ayant fait notre rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. A Paris, ce 30 Août 1786.

Signé le Marquis DE CONDORCET, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

HYDRODYNAMIQUE.



HYDRODYNAMIQUE.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I.

L'HYDRODYNAMIQUE eſt en général une ſcience qui a pour objet les loix de l'équilibre & du mouvement des fluides ; la partie de cette ſcience, qui conſidère l'équilibre des fluides, ſe nomme *hydroſtatique*, & celle qui conſidère leur mouvement, ſe nomme *hydraulique*.

II.

ON appelle *fluide*, un amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres, & parfaitement mobiles en toutes ſortes de ſens ; tels ſont l'eau, le mercure *, l'air, la flamme, &c.

Dans cette définition, les fluides ſont conſidérés comme doués d'une parfaite fluidité ; mais phyſique-

* Le mercure eſt réellement une ſubſtance métallique ; mais comme il eſt habituellement dans l'état de fluidité, nous le regardons, ſous ce point de vue, comme un vrai fluide.

ment parlant, il n'y a point de fluides dont les parties ne ſoient adhérentes les unes aux autres avec une certaine force qui n'eſt pas la même dans tous, & qui peut varier dans un même fluide, par le chaud, par le froid, ou par d'autres cauſes phyſiques. Nous avons ſans ceſſe ſous les yeux des preuves de cette adhérence : ſi l'on jette de l'eau ſur le plancher, les molécules, en s'éparpillant, ont de la peine à ſe ſéparer; lorſqu'on laiſſe tomber un fluide goutte à goutte, on voit que ſes parties forment une eſpèce de filet plus ou moins ſenſible : pluſieurs globules de mercure qui viennent à ſe toucher, s'uniſſent enſemble, & paroiſſent ne former qu'un même tout, &c. Il eſt vraiſemblable que la qualité dont il s'agit, eſt produite par l'aſpérité des parties fluides, combinée avec l'attraction réciproque qu'elles exercent les unes ſur les autres. Mon but n'eſt pas d'approfondir cette queſtion, ni d'examiner en quoi conſiſte la nature de la fluidité, ni quelle peut être la figure des molécules fluides, ni ſi ces molécules ont, par quelque cauſe ſecrette, ce qu'on appelle *un mouvement inteſtin*, indépendant de ceux que la peſanteur ou d'autres forces connues peuvent leur communiquer. J'abandonne aux Phyſiciens & aux Chimiſtes toutes ces recherches, ſur leſquelles on ne peut guère propoſer que des conjectures.

Quelques Auteurs diſtinguent la *liquidité* d'avec la *fluidité*, comme l'eſpèce d'avec le genre. Selon

ux, un corps eſt *fluide,* lorſque ſes parties ne
ɔnt pas liées entre elles, qu'elles cèdent facile-
ıent au toucher, & qu'elles ſe répandent comme
'elles-mêmes; en ce ſens, le ſable fin, la cendre,
n amas quelconque de menus grains, &c. ſont
es *fluides;* mais, ajoutent-ils, pour qu'un corps
oit *liquide,* il faut de plus que ſes parties ſoient
ellement mobiles & ſe balancent tellement par
eur poids, que ſi elles ſont en ſuffiſante quantité,
:lles ſe répandent & forment une ſurface horizon-
ale. Je n'admettrai pas cette diſtinction; & pour
ne conformer à l'uſage le plus généralement reçu,
e confondrai la liquidité avec la fluidité, de ma-
ıière qu'ayant à déſigner une *liqueur,* je l'appellerai
ndiſtinctement *liqueur* ou *fluide.* Il n'eſt queſtion
dans ce Traité que des fluides proprement dits,
& nullement des fluides imparfaits, tels que ſont
le ſable, la cendre, &c.

III.

TOUS les fluides connus peuvent ſe diviſer en fluides *incompreſſibles* & en fluides *compreſſibles* ou *élaſtiques.*

On appelle *fluides incompreſſibles,* ceux dont on ne peut augmenter ni diminuer le volume, en y appliquant les forces ordinaires de preſſion ou de percuſſion; telle eſt, par exemple, l'eau. En effet, ſuivant l'expérience des premiers Académiciens de Florence, répétée depuis par tous les Phyſiciens,

ſi on enferme de l'eau dans une boule creuſe, d'or, d'argent, de cuivre, d'étain, de plomb; qu'enſuite pour condenſer l'eau ou pour diminuer l'eſpace qu'elle occupe, on comprime fortement la boule par le moyen d'une preſſe, qu'on la frappe même à coups de marteau, on trouvera que l'eau ne peut être réduite en un moindre volume, & qu'elle ſe fait jour en forme de roſée, à travers l'enveloppe qui la contient, plutôt que de ſouffrir une diminution de volume. Il en eſt de même du vin, du mercure, &c. Mais on obſervera que cet effet impoſſible par les moyens que nous venons d'indiquer, ou qui du moins ne pourroit devenir ſenſible qu'en employant des forces beaucoup plus grandes que ne le permettent la nature de nos agens & celle des matières dont on fait uſage dans ces ſortes d'expériences, on obſervera, dis-je, que cet effet s'opère très-facilement & très-promptement par l'action du chaud ou du froid. Ainſi, à maſſe égale, l'eau chaude occupe un plus grand volume que l'eau froide; le mercure qu'on tenteroit vainement de condenſer ou de dilater par des poids ou par le choc, eſt extrêmement ſenſible aux impreſſions du froid & du chaud: il ſe condenſe par l'un & ſe dilate par l'autre avec une grande mobilité, comme on en peut juger par les Thermomètres à mercure.

On voit par-là que relativement aux fluides incompreſſibles, les forces ordinaires de compreſ-

on ou de percussion doivent être regardées omme nulles par rapport aux forces d'expansion u de contraction, produites par l'action de la haleur ou du froid.

Les *fluides élastiques* sont ceux qui peuvent être éduits en un volume plus ou moins petit, selon qu'ils sont plus ou moins comprimés. Par exemple, in ballon d'air que l'on comprime avec les mains, liminue de volume, puis s'étend lorsque la compression cesse ou diminue; sur quoi il faut observer que l'action du chaud & du froid est bien plus puissante que la compression pour le même effet: ainsi l'air qu'on échauffe se dilate ou tend à se dilater très-promptement, & s'il est contenu, acquiert une plus grande force élastique; ce même fluide se condense par l'action du froid.

Nous n'avons pas besoin d'avertir, puisque nous l'avons d'ailleurs insinué, que ces deux classes de fluides ne doivent pas être regardées comme géométriquement séparées l'une de l'autre. Il n'existe point de fluide parfaitement incompressible, ni de fluide parfaitement élastique: tout va par gradation dans la Nature: mais nous sommes quelquefois obligés d'examiner dans nos recherches les cas extrêmes, afin de mieux démêler les effets relatifs aux différentes qualités qui peuvent se trouver dans un corps, & d'assigner à chacune de ces qualités ses fonctions propres & non celles d'une autre.

IV.

UN fluide quelconque, qui a la même denſité dans toute ſon étendue, ou qui eſt compoſé de parties toutes de même nature, quand même la denſité varieroit d'un endroit du fluide à l'autre, s'appelle un *fluide homogène.* Telle eſt une pièce d'eau ; il eſt vrai que les parties du fond ſont plus comprimées que celles de la ſurface ; mais cet excès de compreſſion ne diminue pas le volume ou n'augmente pas la denſité, & l'eau eſt compoſée d'ailleurs dans toute ſon étendue de parties égales & ſemblables. L'air eſt auſſi un fluide homogène, quoique dans les lieux bas il ait (à raiſon d'une plus grande charge produite par ſon poids même) une plus grande denſité que dans les lieux élevés, parce qu'il eſt compoſé de parties égales & ſemblables dans toute l'étendue de l'atmoſphère. Nous obſerverons cependant que pour caractériſer ſpécialement ces ſortes de fluides dont la denſité varie, ſans que leurs parties changent de nature, on devroit les appeler *fluides homogènes à denſité variable.*

Un fluide qui ſeroit compoſé de pluſieurs fluides différens, comme, par exemple, d'une couche de mercure, d'une couche d'eau, d'une couche d'huile, &c. s'appelleroit un *fluide hétérogène.*

Par le ſimple mot *fluide*, je déſignerai toujours un fluide homogène ; je ſous-entendrai même que ſa denſité eſt conſtante, à moins que le contraire ne ſoit énoncé ou indiqué.

V.

On doit se rappeler que la *densité* d'un corps (solide ou fluide) est la quantité de matière de ce corps, comprise sous un volume donné qu'on prend pour unité; ou, ce qui revient au même, le quotient de la masse du corps, divisée par le nombre de pieds cubes ou de pouces cubes (selon qu'on prend le pied cube ou le pouce cube pour unité de mesure du volume), qui forment son volume total. Ainsi, en nommant M la masse, G son volume ou sa *grandeur*, D la densité, on a $D = \frac{M}{G}$; & par conséquent $M = G \times D$, c'est-à-dire, que *la masse est égale au produit du volume par la densité.* On voit que la densité d'un corps est toujours relative à celle d'un autre. Il faut avoir soin d'évaluer les volumes des deux corps en unités de la même espèce.

De même, la pesanteur spécifique d'un corps est le poids de ce corps sous un volume donné pris pour unité; ou, ce qui revient au même, le quotient du poids absolu du corps, divisé par le nombre des mesures de son volume. Si l'on nomme donc P le poids absolu d'un corps, G son volume, p sa pesanteur spécifique, on a $P = \frac{p}{G}$; & par conséquent $P = G \times p$, c'est-à-dire que *le poids absolu est égal au produit du volume par la pesanteur spécifique.* Par exemple, soit le corps proposé,

de l'eau douce ; on fait qu'un pied cube d'eau douce pèſe 70 livres, à très-peu de choſe près : prenant donc le poids d'un pied cube d'eau, pour la peſanteur ſpécifique de ce fluide, nous aurons $p = 70$ livres, & $P = G \times 70$ livres ; ſi G eſt de 100 pieds cubes, il viendra $P = 7000$ livres ; ſi $G = 25$ pieds cubes, on aura $P = 1750$ livres.

Dans un même endroit de la Terre, ou à des latitudes égales, les maſſes ſont proportionnelles aux poids ; on doit donc alors ſuppoſer que les denſités de deux corps ſont proportionnelles à leurs peſanteurs ſpécifiques, puiſque les denſités de ces deux corps ſont des maſſes compriſes ſous le même volume, & que leurs peſanteurs ſpécifiques ſont deux poids compris auſſi ſous le même volume.



PREMIÈRE PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de l'équilibre des Fluides.

(1). QUELS que ſoient le nombre, la quantité & la direction des forces qui agiſſent ſur un corps ſolide, ou ſur un ſyſtème de corps ſolides, on peut toujours repréſenter les conditions de l'équilibre ou du mouvement, par des formules analytiques plus ou moins ſimples, ſuivant que les conditions du Problème le ſont plus ou moins; & ſi dans un grand nombre de cas ces formules ſe trouvent trop compliquées, pour être ſuſceptibles d'applications ſatisfaiſantes & uſuelles, on doit imputer cet inconvénient à l'imperfection de l'analyſe, & non pas à la Mécanique, qui a donné tout ce qu'on étoit en droit de lui demander. La queſtion n'eſt pas aux mêmes termes pour les fluides; car nous ne connoiſſons point le nombre, ni la maſſe, ni la figure, ni le volume des atomes qui compoſent un fluide, & par conſéquent nous ſommes dans l'impoſſibilité abſolue de ſoumettre directement au

calcul l'action & la réaction que les molécules d'un fluide exercent les unes sur les autres en vertu des forces qui les pressent. D'ailleurs, quand même on pourroit former les équations du Problème, la pratique n'en retireroit aucune utilité, à cause de leur complication nécessaire, & absolument insurmontable à l'analyse. Il faut donc appeler ici l'expérience au secours de la Mécanique, & fonder les loix de l'équilibre & du mouvement des fluides, sur quelque propriété primitive qui soit commune à tous, & qui les caractérise d'une manière spéciale. Or, parmi les propriétés des fluides, celle qui paroît la plus simple, & qui dérive le plus immédiatement de leur nature, est qu'une masse fluide ne sauroit demeurer en équilibre, à moins qu'une particule quelconque, n'éprouve en tous sens une égale pression. Nous allons donc prendre ce principe pour la base de l'Hydrostatique.

LOI FONDAMENTALE DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

(2). *Lorsqu'une masse fluide est en équilibre ; de quelques forces que ses parties puissent être animées, chaque molécule ou portion infiniment petite de la masse est également pressée en toutes sortes de sens.* Et réciproquement, *si chaque molécule est également pressée en tous sens, tout le système sera en équilibre.*

Car, 1.° puisque toutes les particules du fluide sont indépendantes les unes des autres, & parfai-

tement mobiles en toutes fortes de fens, il eft vifible que fi une molécule quelconque étoit moins preffée d'un côté que d'un autre, elle fe mouvroit néceffairement vers le côté où feroit la moindre preffion, & qu'il n'y auroit plus d'équilibre dans le fyftème ; ce qui eft contraire à l'hypothèfe.

Cette loi eft démontrée par l'expérience; car fi à la même profondeur d'un fluide contenu dans un vafe, on fait aux parois une ouverture, & qu'à cette ouverture on applique un pifton pour empêcher l'écoulement, ce pifton fera repouffé par le fluide, avec la même force, foit que l'ouverture foit horizontale, ou inclinée d'une manière quelconque à l'horizon. Tout cela eft également vrai pour les fluides incompreffibles & pour les fluides élaftiques. Sur quoi on obfervera qu'il peut fe faire phyfiquement qu'à caufe de l'adhérence réciproque des particules, l'équilibre fubfiftât quand même une molécule feroit un peu moins preffée d'un côté que d'autre : mais cette inégalité de preffion ne peut qu'être extrêmement petite; & la propofition énoncée eft rigoureufement vraie pour les fluides dans l'état de fluidité parfaite, tels que nous les confidérons ici.

2.° Il n'eft pas moins évident que fi chaque molécule du fluide eft également preffée en tous fens, elle demeurera en repos; d'où réfultera de

proche en proche le repos ou l'équilibre dans toute l'étendue de la maſſe.

(3). *REMARQUE.* On voit par cette propriété la différence qu'il faut mettre entre l'équilibre des ſolides & celui des fluides. Dans les corps ſolides, la connexion des parties fait qu'une force appliquée à un point quelconque, pouſſe parallèlement toute la maſſe, & que par conſéquent il y aura équilibre, ſi à cette force on en oppoſe directement une autre qui lui ſoit égale; dans les fluides, ſi chaque goutte, priſe ſéparément, n'eſt pas également preſſée dans tous les points de ſa ſurface, ſuivant toutes ſortes de ſens, elle s'étendra vers les côtés où ſeront les moindres preſſions. Suppoſons, par exemple, qu'à une goutte fluide ſoient appliquées deux forces égales, directement oppoſées, & deux autres forces, auſſi égales entr'elles, directement oppoſées, perpendiculaires aux deux premières; que les deux premières ſoient repréſentées chacune par 1, & les deux autres, chacune par 2: la goutte ne ſera pas en équilibre; elle s'allongera dans le ſens des forces 1, & s'applatira dans le ſens des forces 2; de plus ſes parties s'échapperont par les vides compris entre les forces 1 & 2. Or, ſi la goutte étoit un corps ſolide, elle ſeroit évidemment en équilibre. Ainſi, en la regardant comme fluide, elle forme un amas de particules dont le nombre & la figure ſont telles que la goutte ne peut pas

lemeurer en équilibre, si en chaque point, & lans tous les sens, elle n'est pas également pressée.

(4). THÉORÈME I. *Si en un endroit quelconque* M (Fig. 1) *d'un vase* A B C D, *fermé de tous côtés,* Fig. 1. *& plein d'une liqueur considérée comme non pesante, on fait une ouverture à laquelle soit appliqué un piston poussé par une force* P; *l'action de cette force se transmettra dans tous les sens à travers la masse fluide, & chaque point d'une goutte quelconque* f g k h *souffrira la même pression que chaque point immédiatement contigu à la tête du piston.**

Car la pression que souffre chaque point fluide immédiatement contigu au piston, se transmet aux points voisins; chacun de ceux-ci la transmet pareillement à ses voisins; ainsi de suite dans toute l'étendue du fluide. La pression d'un point quelconque du fluide est donc absolument la même que celle de tout point soumis immédiatement à l'action du piston.

(5). COROLLAIRE I. Il suit de-là que si l'on fait en N une seconde ouverture à laquelle soit appliqué un piston poussé par une force Q, il y aura équilibre, ou ni l'un ni l'autre piston ne pourra s'enfoncer, pourvu que les forces P & Q soient entr'elles comme les ouvertures M & N, c'est-à-dire pourvu qu'on ait $P : Q :: M : N$. Car la pression de chaque point de M se transmet à chaque point de N, & réciproquement la pression

de chaque point de N ſe tranſmet à chaque point de M; donc ces preſſions partielles, qui ſont contraires, ſe feront équilibre, ſi elles ſont égales. Or la ſomme des preſſions de M ou la force P eſt proportionnelle à M, & la ſomme des preſſions de N ou la force Q eſt proportionnelle à N; d'où il ſuit qu'on aura, pour l'équilibre, $P : Q :: M : N$.

Il en ſeroit de même pour un plus grand nombre d'ouvertures. Quel que ſoit ce nombre, ſi l'on applique à chacune d'elles un piſton pouſſé par une puiſſance qui lui ſoit proportionnelle; toutes ces puiſſances ſe contre-balanceront mutuellement, & aucun des piſtons ne pourra s'enfoncer & faire remonter les autres.

(6). COROLLAIRE II. Connoiſſant les deux ouvertures M & N, & l'une des puiſſances, on connoîtra l'autre, puiſqu'on a $Q = \frac{P \times N}{M}$, ou $P = \frac{Q \times M}{N}$.

(7). COROLLAIRE III. On voit ſemblablement qu'en vertu de la force P ou Q, la face quelconque fg de la goutte $fgkh$, ſouffre une preſſion qui eſt exprimée par $P \times \frac{fg}{M}$ ou par $Q \times \frac{fg}{N}$; car la preſſion de chaque point de M ou de N ſe tranſmet à chaque point de fg; & chaque point de fg réagit à ſon tour, avec la même

›rce, contre chaque point de M ou de N; donc
ı nommant p la preſſion totale contre fg, on
ıra $P : p :: M : fg$, & $Q : p :: N : fg$;
ɔnc $p = \frac{P \times fg}{M}$, ou $p = \frac{Q \times fg}{N}$.

(8). THÉORÈME II. *Si l'on imagine que la ſur-ce d'une maſſe fluide* A B C D O (Fig. 2), *non* Fig. 2.
'ſante & parfaitement libre, ſoit partagée en une finité d'élémens A, B, C, D, *& qu'à tous ces émens ſoient appliqués perpendiculairement des piſtons uſſés par des puiſſances proportionnelles à leurs baſes; utes ces puiſſances ſeront en équilibre.*

En effet, nous pouvons concevoir que la maſſe ıide $ABCDO$ eſt enfermée de tous côtés dans ı vaſe percé d'une infinité de trous A, B, C, D, ıxquels ſont appliqués des piſtons pouſſés par :s puiſſances proportionnelles aux étendues de s trous : alors on verra (5) que toutes ces ıiſſances ſe balancent mutuellement & qu'aucun :s piſtons ne peut s'enfoncer.

(9). *REMARQUE.* Puiſqu'aucun des piſtons ne :ut s'enfoncer, il eſt évident que la maſſe fluide ›nſerve toujours ſa forme primitive, & que par ›nſéquent elle peut être conſidérée, à cet égard, ›mme formant un corps ſolide. Mais quelques ecteurs douteront peut-être, ſi elle ne prendra .s, ſoit dans un ſens, ſoit dans un autre, quel-ıe mouvement de tranſlation. Or je vais démontrer

que *si tous les élémens de la surface d'un corps solide quelconque, sont poussés perpendiculairement par des puissances proportionnelles à ces élémens ; toutes ces puissances seront en équilibre ;* d'où nous conclurons que le corps demeurera dans une immobilité absolue. Allons par ordre.

(10). LEMME I. *Si les côtés d'un polygone inflexible*
Fig. 3. ABCDE (Fig. 3) *sont poussés perpendiculairement à leurs milieux, par des puissances* P, Q, R, S, T, *proportionnelles à ces côtés ; toutes ces puissances seront en équilibre.*

Menez les diagonales *A C, A D ;* il est démontré dans la Mécanique, que deux forces concourantes en un point, & leur résultante qui passe nécessairement par ce même point, peuvent être représentées par les côtés d'un triangle, perpendiculaires chacun à chacune des trois forces proposées. Ainsi les deux forces *P* & *Q* étant perpendiculaires & proportionnelles aux côtés *A B, B C* du triangle *A B C,* ont pour résultante une force (que je nomme *X*) perpendiculaire & proportionnelle au côté *AC* du même triangle. De plus, la force *X* est perpendiculaire sur le milieu de *A C ;* car elle doit passer par le point *a* de concours des deux forces composantes *P, Q,* qui est évidemment le centre du cercle qu'on circonscriroit au triangle *A B C ;* d'où il suit que la force *X* est perpendiculaire sur le milieu de la corde *A C.* On démontrera

démontrera de la même manière que les deux forces X & R, concourantes au point b, ont pour résultante une force Y, proportionnelle à AD, & perpendiculaire sur son milieu ; que les deux forces Y & S, concourantes au point c, ont pour résultante une force Z, proportionnelle à AE & perpendiculaire sur son milieu ; ainsi de suite, si le polygone avoit un plus grand nombre de côtés. Donc les puissances P, Q, R, S, ont pour résultante une force Z égale & directement opposée à la dernière force T; donc tout le système des forces P, Q, R, S, T, est en équilibre.

(11.) COROLL. I. La même démonstration ayant toujours lieu, quel que soit le nombre des côtés du polygone, & par conséquent aussi lorsque le nombre devient infini ; on voit que si l'on a une courbe rentrante quelconque, inflexible, qu'on la partage en une infinité d'élémens, & qu'au milieu de tous ces élémens on applique perpendiculairement des puissances qui leur soient proportionnelles ; ces puissances seront en équilibre.

(12.) COROLL. II. Considérons le polygone $ABCDE$ comme la section qu'on formeroit en coupant un prisme droit par le milieu de sa hauteur, & parallèlement à ses deux bases opposées ; il est clair que les milieux des côtés AB, BC, &c. sont les centres de gravité des faces rectangulaires du prisme, & que si à ces mêmes points on applique des puissances perpendiculaires & proportionnelles aux faces dont on vient de parler, ces

puiſſances auront entr'elles les mêmes rapports que les puiſſances *P, Q, R, S, T.* Or les puiſſances *P, Q, R, S, T,* ſont en équilibre ; donc auſſi les puiſſances perpendiculaires aux centres de gravité des faces rectangulaires d'un priſme droit, & proportionnelles à ces faces, ſont en équilibre.

Même réſultat, lorſque la ſection & les baſes oppoſées du priſme ſont des courbes, & lorſqu'à tous les points des faces rectangulaires du corps priſmatique ſont appliquées perpendiculairement des puiſſances égales.

Fig. 4. (13.) LEMME II. *Si au point* G (Fig. 4) *milieu de la largeur moyenne* E F *d'un trapèze* A C D B, *eſt appliquée une force* P *perpendiculaire & proportionnelle à la ſurface du trapèze ; cette force pourra être décompoſée en deux autres, l'une perpendiculaire & proportionnelle à la projection orthogonale* A c d B * *du trapèze, l'autre perpendiculaire & proportionnelle au rectangle* L E M N F K, *qui eſt perpendiculaire aux deux plans parallèles* A c d B, M C D N *auxquels il ſe termine.*

Menez par la direction de la puiſſance *P,* & perpendiculairement aux droites parallèles *AB, CD, cd, LK, EF, MN,* le plan *SRT,* qui ſera par conſéquent perpendiculaire aux quatre plans *ACDB, AcdB, CDdc, LMNK;*

* On appelle *projection orthogonale* d'une figure, celle qui eſt formée ſur un plan par des perpendiculaires abaiſſées de tous les points de la figure propoſée.

décompofez enfuite la force P en deux autres V, H, dirigées dans le plan SRT, la première V, perpendiculaire à ST, la feconde H, perpendiculaire à RT. Cela pofé, les trois forces P, V, H, étant perpendiculaires aux trois côtés du triangle RST, on aura

$$P : V : H :: SR : ST : RT \text{ ou } ML;$$

ou bien (en multipliant la fuite des conféquents par des lignes égales),

$$P : V : H :: SR \times EF : ST \times LK : ML \times LK$$
$$:: ACDB : AcdB : LMNK.$$

Or la direction de la force V eft perpendiculaire à $AcdB$, & celle de la force H eft perpendiculaire à $LMNK$, puifqu'elles font dans un plan SRT perpendiculaire aux deux plans $AcdB$, $LMNK$, & que de plus la première eft perpendiculaire à ST, la feconde à RT, qui eft parallèle aux droites LM, KN. Donc, &c.

(14.) COROLL. I. Si la hauteur SR du trapèze $ACDB$ eft infiniment petite, le point G fera le centre de gravité de ce trapèze, le point g, fitué fur la ligne GV, fera le centre de gravité de la projection $AcdB$; & comme le point G eft toujours le centre de gravité du rectangle $LMNK$; il s'enfuit que fi au centre de gravité d'un trapèze infiniment petit eft appliquée une force perpendiculaire & proportionnelle à fa furface, cette force pourra être décompofée en deux autres, dont la première eft perpendiculaire au centre de gravité & proportionnelle à la furface du trapèze de pro-

jection ; la seconde est perpendiculaire au centre de gravité & proportionnelle à la surface d'un rectangle qui a une base égale à la largeur moyenne du trapèze, & pour hauteur la distance comprise entre deux plans parallèles, menés par les bases opposées & parallèles du trapèze, & sur l'un desquels est faite la projection orthogonale de ce même trapèze.

(15). COROLL. II. La même hypothèse subsistant, imaginons une tranche solide infiniment mince, à bases parallèles, & dont la surface convexe soit composée d'une infinité de trapèzes tels que $ACDB$ poussés perpendiculairement par les forces P; & qu'on fasse les projections orthogonales de tous ces trapèzes, sur l'une des bases de la tranche. Cela posé, en substituant à la place de la force P, les deux forces H & V; 1.° on voit (12) que les forces H, dans tout le contour de la tranche, se font équilibre ; 2.° les forces V étant perpendiculaires aux centres de gravité des trapèzes de projection, & proportionnelles à ces trapèzes, ont pour résultante une force représentée par la somme des mêmes trapèzes, & passant perpendiculairement par le centre de gravité de leur système.

(16.) DÉMONSTR. DE L'ART. 9. Partageons d'abord le corps proposé en deux parties, par un plan que je suppose horizontal, pour fixer les idées, & qui forme une section que j'appelle, par la même raison, *section principale*. Imaginons

ensuite que chaque partie soit divisée en une infinité de tranches par des plans parallèles à la section principale, & qu'enfin les surfaces convexes de toutes ces tranches, soient partagées chacune en une infinité de trapèzes, par des plans verticaux. Les forces perpendiculaires aux centres de gravité des trapèzes latéraux, & proportionnelles à ces trapèzes, étant supposées décomposées chacune en deux autres, l'une horizontale, l'autre verticale : on voit, par l'article précédent, 1.° que pour toutes les tranches qui composent le corps entier, les forces horizontales se font équilibre. 2.° Il n'est pas moins clair, relativement aux deux parties du corps, que la résultante des forces verticales, pour la partie inférieure, est proportionnelle à l'aire de la section principale, passe perpendiculairement par son centre de gravité, agissant de bas en haut ; & que de même la résultante des forces verticales, pour la partie supérieure, est proportionnelle à l'aire de la section principale, passe perpendiculairement par son centre de gravité, agissant de haut en bas ; d'où il s'ensuit que ces deux résultantes sont égales & directement opposées, & que par conséquent elles se détruisent. Il y a donc aussi équilibre entre toutes les forces verticales. Donc enfin toutes les forces appliquées à la surface du corps se font équilibre, & ce corps doit demeurer dans une immobilité absolue.

(17.) COROLLAIRE. Concluons de tout ce

qui précède, 1.° que la maſſe fluide *ABCDO* (*Fig. 2*), doit conſerver invariablement ſa figure: 2.° qu'elle ne peut recevoir aucun mouvement de tranſlation.

(18.) SCHOLIE GÉNÉRAL. On voit par les deux Théorèmes précédens, & les conſéquences que nous en avons tirées, la manière dont les forces extérieures à un fluide, agiſſent ſur ſes parties & ſur les parois du vaſe où il peut être contenu. Nous allons maintenant examiner les efforts qui naiſſent de la peſanteur même du fluide, ſoit qu'ils exiſtent ſeuls, ou qu'ils ſe combinent avec des forces extérieures.

Je ſuppoſe toujours avec Galilée, 1.° que la peſanteur d'un corps eſt une force conſtante & proportionnelle à la maſſe, pour toutes les diſtances qui ne diffèrent pas conſidérablement les unes des autres, où ce corps peut ſe trouver du centre de la terre. 2.° Que les directions des peſanteurs des parties d'un même corps qui n'eſt pas très-étendu en largeur, ſont ſenſiblement parallèles entr'elles. Quand il s'agira d'autres hypothèſes de peſanteur, je le dirai expreſſément.



CHAPITRE II.

De l'équilibre d'un fluide soumis à l'action de la pesanteur; pression qu'il exerce contre les parois & le fond du vase où il est contenu.

(19.) THÉORÈME I. *La surface d'une liqueur abandonnée à l'action libre de sa pesanteur, & en équilibre dans un vase* ABCD (Fig. 5) *qui la contient, est perpendiculaire en chacun de ses points à la direction de la pesanteur.* Fig. 5.

Soit AmD la surface libre du fluide ; une particule quelconque m est pressée par la pesanteur, suivant la direction verticale mn; représentons cette force par mn, & décomposons-là en deux autres forces mp, mq, dirigées suivant les deux élémens de la courbe AmD, contigus au point m. Cela posé, pour que la particule m demeure en équilibre, il faut que les forces mp, mq, soient égales chacune à chacune des forces que les particules voisines exercent contr'elle dans les sens opposés pm, qm. Or, ces dernières forces sont égales entr'elles, pour satisfaire à la loi générale de l'article 2. Donc les forces mp, mq, sont aussi égales; donc la direction de la force mn partage en deux parties égales l'angle pmq; donc elle ne penche pas plus sur l'élément mp que sur l'élément mq, ou ce qui revient au même, elle est perpendiculaire en m à la courbe AmD. Et

comme la même perpendicularité de la pesanteur aura également lieu dans tous les autres points de la courbe *A m D*, concluons que réciproquement la surface *A m D* du fluide est perpendiculaire en chacun de ces points à la direction de la pesanteur.

(20.) COROLLAIRE. Donc si les directions des pesanteurs de toutes les molécules du fluide vont concourir en un même point, la courbe *A m D* sera un arc de cercle; ou, la surface du fluide sera partie d'une surface sphérique dont le centre est le point de tendance de toutes les molécules.

Lorsque les dimensions de la surface d'un fluide sont très-petites par rapport au rayon de la Terre, cette surface peut être regardée comme un plan, parce qu'alors le centre de la Terre où les pesanteurs des molécules du fluide vont concourir, peut être regardé comme placé à une distance infinie. Telle est la surface d'une pièce d'eau, celle du
Fig. 6. bassin d'un jardin, &c. En effet, soit *A* (*Fig. 6*) le centre de la Terre supposée sphérique; *B C* un arc quelconque de sa surface; *B D* la tangente au point *B*; *A D* la sécante. M. l'Abbé Picard trouve, dans son *Traité du nivellement*, qu'en supposant le diamètre de la Terre, de 6538594 toises (ce qui est sensiblement vrai), à une distance $BD = 100$ toises, répond la différence de niveau $DC = 1\frac{1}{3}$ lignes seulement. A une distance $BD = 200$ toises, répond $DC = 5\frac{1}{3}$ lignes; à une distance $BD = 300$ toises, répond $DC = 1$ pouce, &c.

(21.) THÉORÈME II. *Si un ſiphon* KMNO (Fig. 7), *de figure quelconque, & dont les branches peuvent être égales ou inégales, contient de l'eau, ou tout autre fluide, les ſurfaces* A B, D E, *de ce fluide, dans les deux branches du ſiphon, ſeront de niveau, c'eſt-à-dire, dans un même plan horizontal.* Fig. 7.

Traçons, par la penſée, dans le réſervoir *FGHL (Fig. 8)*, un ſiphon *KMNO* parfaitement égal à celui qui eſt propoſé; & imaginons ensuite que l'eau du réſervoir, à l'exception de la partie *A B M D E N* qui répond au ſiphon fictif, vienne à ſe durcir ſans changer de place ni de volume; il eſt clair que la portion d'eau, demeurée liquide, ſera dans le même état de compreſſion & de ſtagnation, qu'elle étoit avant que le reſte de la maſſe ſe durcît, & que par conſéquent les deux ſurfaces *A B*, *D E* demeureront de niveau. Or tout eſt le même dans les deux ſiphons des *Figures 7 & 8*; donc les ſurfaces *A B*, *D E*, étant de niveau dans celui de la *Figure 8*, le ſont auſſi dans celui de la *Figure 7*. Fig. 8.

(22.) COROLLAIRE. Le mécaniſme des ſiphons s'applique à une infinité de phénomènes de la Nature. Ainſi, par exemple, ſi on creuſe un puits dans le voiſinage d'un étang, d'une mer, d'une rivière, &c, l'eau montera dans ce puits, & s'y mettra de niveau avec les eaux environnantes, parce que le puits & le réſervoir voiſin peuvent être regardés comme les deux branches aſcendantes

d'un siphon, lesquelles communiquent ensemble au moyen des fentes & des crevasses qui se trouvent dans l'intérieur de la terre. De même, l'eau qu'on amène d'un point à un autre par un long tuyau, comme, par exemple, l'eau destinée à former une fontaine publique, se mettroit de niveau aux deux extrémités de la conduite, si le point d'arrivée étoit aussi élevé que celui de départ; mais le point d'arrivée étant plus bas que celui de départ, l'eau coule & forme la fontaine desirée.

(23.) *REMARQUE.* L'art du nivellement est fondé sur la proposition précédente. Mon objet n'est point d'enseigner ici cet Art qu'on peut apprendre dans d'autres Ouvrages, & en particulier dans le *Traité de M. l'Abbé Picard;* mais je crois devoir expliquer brièvement une méthode très-commode de tenir l'état d'un nivellement, & de s'épargner la peine de faire une multitude de profils.

Fig. 9. Soient *A, B, C, D, E, (Fig. 9)* un nombre quelconque d'objets dont on veut déterminer la position respective par rapport à un même plan horizontal. Considérons ces objets comme s'ils étoient placés au fond d'une mer dont *MN* seroit le niveau; il est clair que la position des points proposés sera connue par rapport au plan horizontal *MN*, si l'on parvient à connoître les lignes verticales *Aa, Bb, Cc, Dd, Ee.* Feignons que le plan *MN* soit élevé au-dessus du point *A* de départ, d'une quantité donnée & arbitraire, par

xemple, de 100 pieds : vous écrirez 100 au point *A*, sur une carte ou brouillon de carte qui sert à eprésenter, au moins grossièrement, le terrein. L'instrument à niveller étant placé en *A*, le premier oup de niveau vous fera connoître de comien le point *A* est plus élevé que le point *B*; uppofons que cette élévation soit de 3 pieds; ous écrirez sur la carte, 103 au point *B*, ce qui eut dire que la verticale *A a* étant de 100 pieds, a verticale *B b* est de 103 pieds. Transportez l'insrument de *A* en *B*, & regardez le point *B* comme e point du départ; le coup de niveau donné de *B* en *C*, vous fera connoître de combien le point *B* est plus élevé que le point *C*; soit cette éléation de 4 pieds 6 pouces; vous écrirez sur la arte au point *C*, 107 pieds 6 pouces pour la aleur de *C c*. En continuant à opérer toujours de a même manière, vous parviendrez à déterminer uccessivement les cotes des autres points; je supose que les cotes trouvées soient telles que la *Figure 9* les représente. Maintenant, voulez-vous avoir de combien le point *A* est plus élevé que e point *C*? Retranchez la cote de *A*, de celle e *C*, c'est-à-dire, 100 pieds de 107 pieds pouces, le reste 7 pieds 6 pouces est la haueur demandée. Voulez-vous savoir de combien le oint *A* est plus élevé que le point *E*? Retranhez 100 pieds de 101 pieds, le reste 1 pied est a hauteur demandée, &c.

On ne se borne pas ordinairement à niveller

un terrein, c'eſt-à-dire, à déterminer la poſition des objets par rapport au plan de l'horizon ; on meſure encore les diſtances des objets & les angles que ces diſtances forment entr'elles, pour avoir la repréſentation complète du terrein.

(24.) SCHOLIE. On doit remarquer que la propoſition de l'*article 21*, ſouffre une reſtriction dans l'état naturel & phyſique des fluides. Pour que la liqueur ſe mette réellement de niveau dans les deux branches du ſiphon, il faut qu'elles aient l'une & l'autre une certaine groſſeur, ſans que néanmoins il ſoit néceſſaire pour cela qu'elles aient la même capacité, ni la même figure. Mais lorſque l'une des branches eſt fort mince, que, par exemple ſon diamètre n'excède pas 2 lignes environ, tandis que celui de l'autre eſt plus conſidérable; alors la liqueur ne ſe met plus de niveau dans les deux branches. La plupart des liqueurs, comme le vin, l'eau, l'huile, l'eſprit-de-vin, &c. montent plus haut dans la petite branche (qu'on nomme *capillaire*, du mot latin *capillus*, cheveu), que dans l'autre ; au contraire le mercure ſe tient plus bas dans la branche capillaire que dans la groſſe branche. Ces phénomènes ont une cauſe particulière dont la recherche appartient à la Phyſique *. Ici je fais abſtraction de cette cauſe, & je conſidère les fluides comme ſimplement ſoumis à l'action

* Voyez à ce ſujet le *Traité de la figure de la Terre*, de M. Clairaut ; & les *Inſtitutions newtoniennes*, de M. l'abbé Sigorgne.

de la pesanteur qui les pousse vers le centre de la Terre; d'où il suit qu'alors ils doivent toujours se mettre de niveau dans les deux branches du siphon, quel que soit le rapport des diamètres de ces branches.

(25.) THÉORÈME III. *La liqueur contenue dans le vase* A B C D (Fig. 10) *étant en repos, & soumise à la seule action de la pesanteur; une particule quelconque* m *est également pressée en tous sens avec une force égale au poids de la petite colonne* o m *qui lui répond verticalement.* Fig. 10.

En effet, 1.° la particule *m* est également pressée en toutes sortes de sens, autrement elle ne seroit pas en équilibre (2).

2.° La pression qu'elle souffre est égale au poids absolu de la petite colonne *o m*; car si l'on conçoit que la masse entière du fluide, à l'exception de la colonne *o m*, vienne à se durcir sans pouvoir changer de place ni de volume, la particule *m* demeure toujours dans le même état de compression qu'auparavant. Or, lorsque le filet *o m* est seul fluide, le reste de la masse étant durci, elle porte évidemment le poids entier de ce filet *o m*. Donc la mesure de la pression qu'elle souffre dans tous les sens, est le poids absolu de la même colonne *o m*.

(26.) COROLLAIRE I. Imaginons une courbe quelconque *F m Q* (*Fig. 11*) qui touche la particule *m* du côté de la paroi *A B*, & supposons Fig. 11.

que la portion de liqueur *A F m Q B* se durcisse sans pouvoir changer de place ni de volume ; la particule *m* est toujours pressée en tous sens, de la même manière que si la masse entière étoit demeurée fluide. On peut aussi concevoir, sans troubler l'équilibre, que la portion quelconque *D H S C* de liqueur est encore durcie. Donc si
Fig. 12. l'on a un vase quelconque *F Q S H (Fig. 12)*, un point quelconque *m* de ses parois est pressé par le fluide avec une force égale au poids absolu du petit filet vertical *o m* qui se termineroit à la surface du fluide, prolongée s'il est nécessaire ; car on peut regarder la liqueur du vase *F Q S H (Fig. 12)* comme la portion *F Q S H* de liqueur du vase représenté *(Fig. 11)*, les deux portions *A F m Q B*, *D H S C*, étant supposées durcies.

(27). COROLLAIRE II. Soit *m y* une partie quelconque infiniment petite des parois du vase *F Q S H (Fig. 12)*; la pression perpendiculaire que cette partie souffre, est en raison composée du nombre de molécules qui couvrent la petite surface *m y*, & de la hauteur verticale *o m* qu'on peut regarder comme la même pour tous les points de l'élément *m y*. Ainsi en nommant *p* la pesanteur spécifique de la liqueur, la pression dont il s'agit sera exprimée par $p \times om \times my$, puisque *(NOT. GÉN. art. V)* le poids absolu est le produit de la pesanteur spécifique par le volume.

(28.) THÉORÈME IV. *La liqueur contenue*
Fig. 13. *dans le vase* A B C D (Fig. 13) *étant en repos, &*

soumise à la seule action de la pesanteur : la somme des pressions perpendiculaires que souffrent tous les élémens d'une partie quelconque finie f n r *du fond ou des parois du vase, est égale au poids absolu d'une colonne qui auroit pour base la surface* f n r *(convertie en une surface plane, s'il est nécessaire), & pour hauteur la distance verticale* G O *du centre de gravité* G *de la même surface* f n r, *à la surface* A D *du fluide.*

Partagez la surface fnr en une infinité d'élémens fg, gx, xy, &c; & menez les verticales ft, gu, xz, &c, terminées par la surface du fluide. En nommant p la pesanteur spécifique du fluide, les pressions perpendiculaires que souffrent les élémens fg, gx, xy, &c, sont représentées respectivement par les produits $p \times fg \times ft$, $p \times gx \times gu$, $p \times xy \times xz$, &c. Or, si l'on considère ces produits comme les momens d'autant de petits poids, par rapport au plan de niveau de la liqueur, on aura, par la Mécanique, $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz +$ &c. $= p \times (fg + gx + xy +$ &c.$) \times GO = p \times fnr \times GO$; ce qui revient à l'énoncé du Théorème.

(29.) COROLLAIRE I. Donc si le fond BC (*Fig. 14, 15, 16*) d'un vase de figure quelconque est horizontal, la pression que ce fond souffre est exprimée par $p \times BC \times GO$, p étant la pesanteur spécifique du fluide, GO la verticale levée par le centre de gravité G du fond BC, Fig. 14, 15 & 16.

& terminée par la surface du fluide, prolongée lorsqu'il est nécessaire.

On voit par-là que si les fonds des trois vases, représentés dans les *Figures 14, 15, 16*, sont égaux, & que la même liqueur soit à même hauteur au-dessus du fond, dans les trois vases, on voit, dis-je, que les fonds souffriront des pressions égales. Il est en effet évident que si l'on mène (*Fig. 15, 16*) les verticales *B m*, *C n*; qu'ensuite on suppose (*Fig. 15*) que les deux portions de liqueur *A B m*, *D C n*, se durcissent en conservant toujours la même place & le même volume, & que (*Fig. 16*) les espaces *A B m*, *D C n* étant supposés remplis de liqueur, les parois *A B*, *D C* s'anéantissent, tout demeure le même qu'auparavant, & les trois fonds doivent être également pressés.

(30.) COROLL. II. Il peut donc se faire que la pression du fond d'un vase, & le poids total de la liqueur contenue dans ce vase soient des choses très-différentes. Dans le vase cylindrique de la *Figure 14*, la pression du fond est égale au poids de toute la liqueur; mais dans les vases des *Figures 15 & 16*, la première force est moindre ou plus grande que la seconde.

Lorsqu'on a un vase rempli d'eau à soulever verticalement, ou à soutenir sur un plan incliné, il faut avoir égard, dans le calcul de la puissance, au poids absolu de l'eau & du vase, & nullement à la pression contre les fonds & contre les parois;

car

ar alors on peut considérer à chaque instant le ystême comme ne faisant qu'une seule & même nasse solide.

(31.) COROL. III. Soit DC (*Fig. 17*) ne surface rectangulaire verticale, comme, par xemple, une vanne d'écluse, exposée à la pression e la masse d'eaux dormantes $DABC$, dont étendue horizontale DA est aussi grande ou ussi petite qu'on voudra, car cela est absolument ndifférent quant à l'effet de la pression. Soit G e milieu ou centre de gravité de la surface DC; ommons a son côté horizontal. Cela posé, .° la pression perpendiculaire que supporte la urface DC, est $p \times a \times DC \times GD$, ou $p \times a \frac{(DC)^2}{2}$, p étant la pesanteur spécifique de l'eau. insi pour faire une application particulière, si on suppose $a = 3$ pieds, $DC = 12$ pieds, & onséquemment $a \times \frac{(DC)^2}{2} = 216$ pieds cubes; u'ensuite on se rappelle que le pied cube d'eaux ouces pèse 70 livres, ce qui donne $p = 70$ livres, n prenant le pied cube pour l'unité de mesure du olume : on trouvera que la valeur de la pression $\times a \times \frac{(DC)^2}{2}$ est 15120 livres. Fig. 17.

2.° Pour déterminer le centre P de *pression*, c'est-à-dire, le point par où passe la résultante de outes les pressions contre tous les points de DC, e partage DC en une infinité d'élémens Rr, &

j'obſerve que le moment de la preſſion totale $p \times a \times \frac{(DC)^2}{2}$ devant être égal (par les principes de la Statique) à la ſomme des momens des preſſions élémentaires contre tous les Rr, on a l'équation

$$p \times a \times \frac{(DC)^2}{2} \times PD = \int p \times a \times Rr \times DR \times DR,$$

ou bien $\frac{(DC)^2}{2} \times PD = \int Rr \times (RD)^2$.

Or la ſomme des quantités $Rr \times (RD)^2$, priſe dans toute la hauteur DC, compoſe évidemment une pyramide dont la baſe $= (DC)^2$ & la hauteur $= DC$. Donc $\frac{(DC)^2 \times PD}{2} = \frac{(DC)^3}{3}$; & par conſéquent $PD = \frac{2}{3} DC$. Le centre de preſſion eſt donc placé aux deux tiers de la hauteur DC, à compter de la ſurface du fluide. Ce point eſt celui du plus grand effort des eaux, & conſéquemment l'endroit où il faudroit appliquer perpendiculairement la force deſtinée à ſoutenir la pouſſée des eaux, la ſurface DC étant ſuppoſée d'ailleurs parfaitement libre & deſtituée de tout autre appui.

On trouveroit ſemblablement la preſſion & le centre de preſſion, ſi la ſurface DC étoit inclinée.

Fig. 1. (32.) COROL. IV. On a vu (5) que les deux puiſſances P & Q (*Fig. 1*) appliquées à deux piſtons qui preſſent un fluide contenu dans un vaſe fermé de tous côtés, excepté en M & N,

ɔivent être entr'elles comme les ouvertures M N, pour se faire mutuellement équilibre; ce ii donne $Q = P \times \frac{N}{M}$. Supposons maintenant ıe la puissance appliquée en N ait non-seulement contre-balancer la puissance P, mais encore la eſſion qui résulte contre N en vertu du poids ı fluide : alors cette dernière pression étant ‹ $N \times ND$, où p est la pesanteur spécifique du ide, il est clair que la puissance appliquée en N vra avoir pour valeur $P \times \frac{N}{M} + p \times N \times ND$.

Quant à la force nécessaire pour soutenir le ſe : si on le suppose placé sur une table hori- ntale, cette table supportera un effort égal à somme faite du poids du vase, du poids de au, & d'un poids égal à la puissance P, cette issance étant supposée agir verticalement de haut bas. De plus, il faudra que l'effort de la puis- ce Q soit détruit par le frottement du vase la table, ou par un effort égal & con- ire à Q.



CHAPITRE III.

De l'équilibre & de la pression des fluides mixtes ou des fluides dont la densité est variable.

(33.) THÉORÈME I. *Deux fluides de différentes*
Fig. 18. *espèces* AFIG, EDMK (Fig. 18), *dont les bases* AF, ED *sont de niveau, & dont les pressions en s'exerçant sur le fluide quelconque interposé* ABCD, *se balancent mutuellement, ont des hauteurs* AH, EK *réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques.*

En effet, les pressions des deux fluides *AFIG, EDMK,* sur leurs bases, doivent être regardées comme des poids, qui pressant la surface du fluide *ABCD,* se font équilibre; & par conséquent (5) ces pressions sont entr'elles comme les bases *AF, ED.* Or, en nommant p la pesanteur spécifique du fluide *AFIG, H* sa hauteur *AH,* ϖ la pesanteur spécifique du fluide *EDMK, h* sa hauteur *EK:* les pressions dont il s'agit sont respectivement (29), $p \times H \times AF$, $\varpi \times h \times ED$. Ainsi on a la proportion $p \times H \times AF : \varpi \times h \times ED :: AF : ED$; d'où l'on tire $p \times H = \varpi \times h$, & $H : h :: \varpi : p$.

Par exemple, si le fluide *AFIG* est de l'eau, & le fluide *EDMK,* du mercure, on aura, $p : \varpi :: 1 : 14$, & par conséquent $H : h :: 14 : 1$.

D'où il suit que, pour contre-balancer une colonne 'eau de 32 pieds de hauteur, il faut employer ne colonne de mercure, qui ait, à peu de chose rès, 28 pouces de hauteur.

(34.) COROLLAIRE I. Donc si un fluide, ont la pesanteur spécifique est ϖ, presse sous une auteur h, une surface, ou un autre fluide, on ourra substituer à cette pression la pression d'un luide dont la pesanteur spécifique soit p, en onnant à ce dernier fluide une hauteur exprimée ar $\frac{\varpi \times h}{p}$.

(35.) COROLLAIRE II. De-là suit la manière de léterminer la pression sur la base MN (*Fig. 19*) l'un vase qui contiendroit des couches horizontales le différens fluides $MNKD$, $DKGC$, $CGFB$, $BFEA$; car soient ML, LP, PQ, QH, les auteurs ou épaisseurs verticales de ces couches; , p', p'', p''', leurs pesanteurs spécifiques: la presion du fond MN sera la même que si, à la lace des couches supérieures $DKGC$, $CGFB$, $BFEA$, on substitue d'autres couches pareilles la couche inférieure $MNKD$, & dont les auteurs soient respectivement $\frac{p' \times LP}{p}$, $\frac{p'' \times PQ}{p}$, $\frac{p''' \times QH}{p}$; donc (29) la pression de $MN =$ $p \times MN \times \left(ML + \frac{p' \times LP}{p} + \frac{p'' \times PQ}{p} + \frac{p''' \times QH}{p}\right) = MN \times (p \times ML + p' \times LP +$ Fig. 19.

$p'' \times PQ + p''' \times QH$). C'eſt-à-dire, que *pour avoir la preſſion du fond* M N, *il faut multiplier ce fond par la ſomme des produits des hauteurs & des peſanteurs ſpécifiques des couches fluides contenues dans le vaſe.*

Fig. 20. (36.) THÉORÈME II. *Le fluide* ABC (Fig. 20), *peſant & contenu dans un vaſe, étant ſuppoſé compoſé d'une infinité de couches, dont la denſité varie ſuivant une loi quelconque; il y aura équilibre dans ce fluide, ſi toutes les couches ſont de niveau, ou perpendiculaires à la direction de la peſanteur.*

Imaginons d'abord que la couche la plus baſſe *MNB*, exiſte ſeule, & qu'elle ſoit en équilibre: ſa ſurface *MN* ſera horizontale (19). D'un autre côté, il eſt clair (8) que cette couche conſervera ſon état, ſi à chacun de ſes points on applique perpendiculairement des puiſſances égales de quantités quelconques; car qu'elle ſoit peſante ou non, les efforts de ces puiſſances agiſſent de la même manière les uns contre les autres & contre les parois du vaſe. Or, les puiſſances dont il s'agit ne ſont autre choſe que les preſſions réſultantes du poids des tranches ſupérieures *MNQP*, *PQSR*..... *DECA*; & on voit que tous les points de *MN* ſouffriront des preſſions égales, ſi tous les plans *PQ*, *RS*...... *DE*, *AC*, ſont horizontaux. Par conſéquent, dans cette hypothèſe, la tranche *MNB* eſt en équilibre. On prouvera de même que la tranche *MNQP* eſt en équilibre, lorſque les plans *RS*.... *DE*, *AC*,

nt horizontaux; ainſi de ſuite. Il y a donc équi-
bre dans toute l'étendue du fluide, lorſque ſes
uches ſont horizontales.

(37.) **Problème.** *Déterminer la preſſion que
fluide du Théorème précédent exerce contre une partie
uelconque des parois du vaſe ?*

Par le point B, le plus bas du fluide, ſoit
levée la verticale BH; on voit, par exemple,
ue le point B porte tout le poids du filet ver-
cal BH, ou la ſomme des poids des filets partiels
b, bc, bd, &c. Or, ſi l'on nomme reſpecti-
ement ϖ, ϖ', ϖ'', &c. les denſités ou peſanteurs
écifiques des tranches MNB, $MNQP$,
QRS, &c: le poids du filet $Bb = \varpi \times Bb$;
elui du filet $bc = \varpi' \times bc$; celui du filet $cd =$
$\varpi'' \times cd$, &c. Ainſi la preſſion du point B a pour
aleur $\varpi \times Bb + \varpi' \times bc + \varpi'' \times cd +$ &c.
t comme cette valeur eſt la même choſe que

$$\varpi \times \left(Bb + \frac{\varpi' \times bc}{\varpi} + \frac{\varpi'' \times cd}{\varpi} + \&c.\right),$$

u $\varpi' \times \left(bc + \frac{\varpi \times Bb}{\varpi'} + \frac{\varpi'' \times cd}{\varpi'} + \&c.\right),$

u $\varpi'' \times \left(cd + \frac{\varpi \times Bb}{\varpi''} + \frac{\varpi' \times bc}{\varpi''} + \&c.\right),$

u, &c: on voit qu'on peut ſubſtituer au fluide
ropoſé, un fluide dont la denſité eſt la même
ur toute la hauteur BH.

Qu'on mène par les deux points quelconques
F, f, infiniment voiſins, les deux plans horizontaux
GT, gt, leſquels déterminent les deux élémens
Gg, Tt, des parois du vaſe. Il réſulte ſur chaque

point de Gg ou de Tt, une preſſion perpendiculaire égale à la preſſion du point F : ce qui eſt évident (25), en ſubſtituant à notre fluide un fluide dont la denſité ſoit conſtante. Or la preſſion du point F eſt le poids abſolu du filet vertical HF; & comme, en faiſant $HF = x$, la denſité ou la peſanteur ſpécifique du fluide en $F = \varphi$, le poids du filet HF eſt évidemment $\int \varphi\, dx$, il s'enſuit que la preſſion perpendiculaire que ſouffre Gg, eſt $Gg \times \int \varphi dx$, & que la ſomme des preſſions contre AG eſt $\int Gg \times \int \varphi\, dx$. Faiſons quelques applications particulières de cette formule.

Fig. 21. Exemple I. *On demande la preſſion que ſupporte le fond horizontal* KD *du vaſe* AKDC (Fig. 21), *les denſités des tranches* GT, MN, *étant entr'elles comme les hauteurs* HF, Hb?

Soient $HB = a$, la denſité du fluide en $KD = \varpi$; on aura, $\varphi = \frac{\varpi x}{a}$, $\int \varphi\, dx = \int \frac{\varpi x dx}{a} = \frac{\varpi x^2}{2a} = \frac{\varpi a}{2}$, en faiſant $x = a$.

Donc la preſſion du fond KD ſera $\frac{\varpi a}{2} \times KD$.

Ce réſultat peut ſe trouver par les ſimples élémens de la Géométrie, en conſidérant que les denſités peuvent être cenſées former une progreſſion arithmétique, dont le premier terme, qui répond au point H, eſt zéro, le dernier ϖ, & le nombre des termes, HB.

Fig. 22. Exemple II. *Le vaſe* AKDC (Fig. 22), *étant ſuppoſé rectangulaire, on demande la preſſion*

que souffre la partie VY *de la paroi verticale* AK, *les densités du fluide étant proportionnelles aux hauteurs, comme dans l'exemple précédent ?*

En faisant $HB = a$, la densité du fluide en $KD = \varpi$, on aura, $\varphi = \frac{\varpi x}{a}$, $\int \varphi\, dx = \int - \frac{\varpi x\, dx}{a} = \frac{\varpi x^2}{2a}$; & $\int Gg \int \varphi\, dx = \int \frac{\varpi x^2\, dx}{2a} = \frac{\varpi x^3}{6a} + A$. La constante A doit être telle que l'intégrale ou la pression s'évanouisse, lorsque $x = AV$; ce qui donne $A = - \frac{\varpi \times (AV)^3}{6HB}$. Faisant ensuite $x = AY$, on aura $\frac{\varpi \times (AY)^3 - \varpi \times (AV)^3}{6HB}$, pour la valeur totale de la pression contre VY.

On pourroit parvenir au même résultat, sans le secours du Calcul intégral, en considérant que les poids absolus des filets HF, & par conséquent aussi les pressions contre les élémens de VY, croissent comme les carrés des hauteurs HF, ou comme les élémens d'un tronc de pyramide, lequel a pour hauteur VY, pour base supérieure $\frac{\varpi \times (AV)^2}{2HB}$, & pour base inférieure $\frac{\varpi \times (AY)^2}{2HB}$. D'où il suit que la valeur de ce tronc, ou de la pression contre VY, est $\frac{\varpi \times (AY)^2}{2HB} \times \frac{AY}{3} - \frac{\varpi \times (AV)^2}{2HB} \times \frac{AV}{3}$, ou $\frac{\varpi \times (AY)^3 - \varpi \times (AV)^3}{6HB}$.

CHAPITRE IV.

De l'épaisseur que doivent avoir les tuyaux de conduite, pour résister à la pression des fluides stagnans.

(38.) ON appelle *tuyaux de conduite*, les tuyaux qui mènent l'eau d'un réservoir à un endroit plus bas, pour y former un jet d'eau, une fontaine, &c.

(39). LEMME. *Si à tous les angles d'un*
Fig. 23. *polygone régulier flexible* A B C D E F (Fig. 23), *sont appliquées des puissances* P, Q, R, &c. *dirigées du centre* O *à la circonférence, & en équilibre:* 1.° *toutes ces puissances sont égales;* 2.° *tous les côtés du polygone sont également tendus;* 3.° *la somme de toutes les puissances est à la tension de l'un quelconque des côtés du polygone, comme le contour du polygone est au rayon du cercle circonscrit.*

Prenez arbitrairement, sur la direction de l'une P des puissances, la partie Ay pour la représenter, & achevez le parallélogramme $Axyz$, dont les côtés Ax, Az tombent sur les côtés AB, AF du polygone. La puissance P, la tension du cordon AB, & celle du cordon AF étant en équilibre, seront proportionnelles aux trois lignes Ay, Ax, xy, ou (à cause des deux triangles isoscèles semblables xAy, OAB), aux trois lignes AB,

OB, *OA*; de même la puiſſance *Q*, la tenſion du cordon *BC*, & celle du cordon *BA*, ſont proportionnelles aux trois lignes *BC*, *OC*, *OB*; ainſi de ſuite. Or, dans toutes ces ſuites de proportionnelles, il règne évidemment le même rapport, puiſqu'en vertu de l'équilibre, chaque côté du polygone eſt également tendu en ſens oppoſés. Ainſi en nommant x, g, h, k, l, z les tenſions des côtés *AB*, *BC*, *CD*, &c. du polygone, on aura $P:Q:R:S:T:V:x:g$ $h:k:l:z :: AB:BC:CD:DE:EF:FA$ $OB:OC:OD:OE:OF:OA$. Donc 1.° à cauſe de $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, on aura $P = Q = R = S = T = V$. 2.° A cauſe de $OB = OC = OD = OE = OF = OA$, on aura $x = g = h = k = l = z$. 3.° On aura $P + Q + R + S + T + V : x :: AB + BC + CD + DE + EF + FA : OB$.

(40). THÉORÈME. *Si l'on a* (Fig. 24 & 25) *deux cylindres flexibles* ABCD, abcd, *droits ou inclinés, remplis de liqueurs de différentes eſpèces; les tenſions des deux circonférences* BMNC, bmnc *des baſes, ſuivant les directions des tangentes en chacun de leurs points, ſeront entr'elles en raiſon compoſée de leurs rayons* BH, bh, *des peſanteurs ſpécifiques des liqueurs, & des hauteurs verticales des cylindres.* Fig. 24 & 25.

Je ſuppoſe que les baſes *BMNC*, *bmnc*, ſont horizontales, ou que du moins tous leurs points puiſſent, dans chaque cylindre, être regardés comme également éloignés des ſurfaces ſupérieures des

fluides ; ce qui a lieu dans la pratique, puiſqu'on ne cherche les épaiſſeurs des tuyaux, que pour des tuyaux dont les hauteurs ſont conſidérables en comparaiſon de leurs diamètres.

Soient AB, ab les hauteurs verticales de nos deux cylindres ; p & ϖ les peſanteurs ſpécifiques des deux liqueurs ; F & f les tenſions des deux circonférences $BMNC$, $bmnc$. Il eſt clair que les ſommes des preſſions exercées du dedans au dehors, ſuivant les directions des rayons, ſur tous les points des deux circonférences $BMNC$, $bmnc$, par les fluides $ABCD$, $abcd$, ſont exprimées par les produits $p \times BMNC \times AB$, & $\varpi \times bmnc \times ab$. Or, par l'article précédent, on a les deux proportions :

$$p \times BMNC \times AB : F :: BMNC : BH,$$
$$\varpi \times bmnc \times ab : f :: bmnc : bh.$$

Mais les circonférences $BMNC$, $bmnc$, ſont entr'elles comme leurs rayons BH, bh, c'eſt-à-dire, $BMNC : BH :: bmnc : bh$. Donc on aura $p \times BMNC \times AB : F :: \varpi \times bmnc \times ab : f$; ou bien $F : f :: p \times BMNC \times AB : \varpi \times bmnc \times ab$; ou bien encore (en mettant pour la raiſon de $BMNC$ à $bmnc$ celle de BH à bh),

$$F : f :: p \times BH \times AB : \varpi \times bh \times ab.$$

(41.) PROBLÈME. *Déterminer le rapport des épaiſſeurs que doivent avoir deux cylindres compoſés d'anneaux flexibles pour réſiſter aux efforts de deux fluides qui tendent à les rompre !*

Coupons les deux cylindres de l'article précédent

suivant leurs bases $BMNC$, $bmnc$; & soient (*Fig. 26 & 27*), les deux couronnes ou anneaux $BSERKM$, $bserkm$, les sections résultantes. Imaginons que ces anneaux soient composés d'une infinité de filets représentés par les circonférences $XYVZ$, $xyvz$; les résistances qu'ils opposent à leur rupture, sont évidemment en raison composée des nombres de filets, ou des épaisseurs BS, bs, & des ténacités des matières qui forment les tuyaux. Donc, en nommant R & r les deux résistances dont il s'agit; E & e les épaisseurs BS & bs; T & t les ténacités des matières dont les tuyaux sont faits: on aura $R : r :: ET : et$. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces R & r soient égales respectivement aux forces F & f dont il a été parlé dans l'article précédent. Donc, en nommant H & h les hauteurs des liqueurs dans les deux cylindres, D & d les diamètres des bases des mêmes cylindres: on aura Fig. 26 & 27.

$$ET : et :: \frac{p \times H \times D}{2} : \frac{\varpi \times h \times d}{2}.$$

Donc $E : e :: \frac{p \times H \times D}{T} : \frac{\varpi \times h \times d}{t}$, c'est-à-dire, que les épaisseurs des deux anneaux proposés, sont comme les produits des pesanteurs spécifiques des liqueurs, des hauteurs des liqueurs, des diamètres des tuyaux, divisés par les ténacités des matières dont les tuyaux sont composés.

(42.) COROLLAIRE I. Lorsque les liqueurs sont de même espèce aussi-bien que les matières

dont les tuyaux ſont faits, on a $p = \varpi$, $T = t$, & la proportion précédente devient $E : e :: HD : hd$.

(43.) COROLL. II. Si on a $p = \varpi$, $T = t$, $D = d$, on aura $E : e :: H : h$. Par où l'on voit que toutes choſes d'ailleurs égales, l'épaiſſeur d'un anneau doit être d'autant plus grande que la hauteur du fluide placé au-deſſus eſt plus grande.

Ainſi on ſe jette dans une dépenſe ſuperflue & abſolument inutile, en donnant la même épaiſſeur à tous les tuyaux d'aſſemblage qui doivent former une conduite deſtinée à ſoutenir l'eau à une hauteur conſidérable ; car ſi les parties inférieures ont une épaiſſeur ſuffiſante, comme elles doivent l'avoir en effet, les parties ſupérieures ont néceſſairement trop d'épaiſſeur. On fait cette faute en une infinité d'occaſions : on l'a faite notamment dans les anciens tuyaux de la Machine de Marly. Il ſeroit pourtant bien aiſé d'avoir des tuyaux d'aſſemblage de même diamètre intérieur, & de trois ou quatre épaiſſeurs différentes ; de placer en bas les tuyaux les plus épais, & ſucceſſivement les autres à raiſon des différentes hauteurs de l'eau.

(44). SCHOLIE. Pour pouvoir appliquer la théorie précédente à la pratique, il faut connoître par une expérience immédiate, l'épaiſſeur qu'un certain tuyau doit avoir pour réſiſter à la preſſion d'un fluide donné ; il faut de plus connoître les ténacités des matières dont les tuyaux peuvent être compoſés. Les Auteurs qui ont fait des expériences de ce genre, donnent des réſultats

quelquefois très-différens les uns des autres. Je vais déterminer les épaisseurs des tuyaux de plomb & de cuivre, d'après une expérience faite autrefois à Versailles, & une proposition de M. Mariotte, rapportées l'une & l'autre dans un recueil qui a pour titre : *Divers ouvrages de Mathématiques & de Physique, par M.rs de l'Académie Royale des Sciences ;* Paris, 1693.

L'expérience est *qu'un tuyau de plomb de 16 pouces de diamètre, épais de 6 ½ lignes, a soutenu 50 pieds de charge d'eau* (page 516 de l'ouvrage cité).

La proposition de M. Mariotte est *qu'un tuyau de cuivre de 6 pouces de diamètre, sous 30 pieds de charge d'eau, doit avoir ½ ligne d'épaisseur* (page 513).

Il peut se faire que les épaisseurs dont il s'agit soient plus grandes qu'il ne les faudroit pour le simple état d'équilibre ; car il n'est point dit dans l'expérience citée, qu'on ait diminué l'épaisseur du plomb, jusqu'à ce que le tuyau vînt à crever ; ni dans la proposition de M. Mariotte, qu'on ait soumis le cuivre à la même épreuve. Mais on fait très-sagement dans la pratique de porter ainsi les mesures au-delà des limites de l'équilibre.

En appliquant aux deux hypothèses précédentes, la proportion générale de l'article 41, $E : e :: \frac{p \times H \times D}{T} : \frac{\varpi \times h \times d}{t}$, elle deviendra $6\frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: \frac{50 \times 16}{T} : \frac{30 \times 6}{t}$; d'où résulte $\frac{T}{t} = \frac{40}{117}$. Ce rapport de la ténacité du plomb à celle du

cuivre, eſt fort différent de celui qu'on trouveroit en comparant enſemble les poids que deux fils, l'un de plomb, l'autre de cuivre, peuvent ſoutenir ſans ſe rompre. Néanmoins, dans les applications que nous allons faire de nos formules, nous adopterons l'expérience de Verſailles, & la propoſition de M. Mariotte, comme étant immédiatement fondées ſur des élémens ſemblables à ceux des queſtions que nous avons à réſoudre.

EXEMPLE I. *On propoſe de déterminer l'épaiſſeur que doit avoir un tuyau de plomb de 6 pouces de diamètre, & qui doit ſoutenir l'effort d'une colonne d'eau de 100 pieds de hauteur ?*

En nommant x l'épaiſſeur cherchée, on aura $50 \times 16 : 100 \times 6 :: 6\frac{1}{2}$ lignes : $x = 4\frac{7}{8}$ lignes.

EXEMPLE II. *On demande l'épaiſſeur que doit avoir un tuyau de cuivre de 4 pouces de diamètre pour ſoutenir l'effort d'une colonne de mercure de 50 pieds de hauteur !*

La peſanteur ſpécifique de l'eau eſt à celle du mercure, comme 1 eſt à 14 ; ainſi en employant la propoſition de M. Mariotte, & nommant x l'épaiſſeur cherchée, on aura

$$30 \times 6 \times 1 : 50 \times 4 \times 14 :: \tfrac{1}{2} : x = 7\tfrac{7}{9} \text{ lignes.}$$



CHAPITRE V.

CHAPITRE V.

De l'Équilibre des Fluides dans des vases flexibles.

(45.) Lorsqu'un vase est solide, le fluide qu'il contient s'adapte à sa forme intérieure, & la surface de ce fluide, supposée libre, est toujours horizontale ; mais quand les parois du vase sont flexibles, ce vase prend une figure particulière, telle que la demande l'équilibre des forces auxquelles le fluide est soumis ; avec cette condition généralement nécessaire, que si la partie supérieure du fluide en a la liberté, elle se met de niveau, comme si le vase étoit solide ; car aussi-tôt que l'équilibre est établi dans un vase flexible, rien n'empêche de regarder ce vase comme solide. Voici les principes d'après lesquels on peut déterminer en général la figure d'un vase flexible.

(46.) Lemme. *Déterminer les conditions de l'équilibre d'un polygone flexible, à chacun des angles duquel sont appliquées deux sortes de forces dirigées du dedans au-dehors, les unes qui divisent les angles du polygone en deux parties égales, les autres qui sont toutes parallèles à une ligne donnée de position ?*

Soient (*Fig.* 28) AB, BC, CD, trois côtés consécutifs du polygone proposé ; P & P' les puissances qui divisent en deux parties égales les Fig. 28.

deux angles ABC, BCD du polygone; p & p' les puissances parallèles entr'elles & à une ligne donnée de position. Ayant pris BM & BN pour représenter les deux forces P & p, j'achève le parallélograme $BMON$, afin de réduire ces deux forces à une force unique, représentée par la diagonale BO. Je forme le second parallélograme $BOKH$, dont BO est un côté, la diagonale BK tombe sur le côté CB prolongé, & le côté BH tombe sur le côté AB du polygone. Alors il est évident que BK exprime la tension du côté CB, dans le sens CB. En faisant la même opération pour l'angle C, que pour l'angle B, c'est-à-dire, le parallélograme $Cmon$ analogue au parallélograme $BMON$, & le parallélograme $Cokk$ analogue au parallélograme $BOKH$; on voit que Ck exprime la tension du côté BC dans le sens BC. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le côté BC soit également tendu dans le sens CB & dans le sens opposé BC. Reste donc seulement à trouver les expressions des lignes BK, Ck, & à les égaler entr'elles.

Le triangle BOK donne $BO : BK :: \text{sin.}\, BKO : \text{sin.}\, BOK$; & par conséquent $BK = \frac{BO \times \text{sin.}\, BOK}{\text{sin.}\, BKO}$. Or, ang. $BKO =$ ang. ABK; & ang. $BOK =$ ang. $BOM +$ ang. $MOK =$ ang. $OBp +$ ang. ABZ. Ainsi $BK = \frac{BO \times \text{sin.}\, (OBp + ABZ)}{\text{sin.}\, ABK}$; ou $BK = \frac{BO \times (\text{sin.}\, ABZ . \text{cos.}\, OBp + \text{cos.}\, ABZ . \text{sin.}\, OBp)}{\text{sin.}\, ABK}$,

le finus total étant pris pour l'unité. Mais, si du point O on abaiffe OR perpendiculaire fur Bp, on aura

$$\text{fin.}\,OBp = \frac{OR}{BO} = \frac{ON \cdot \text{fin.}\,ONR}{BO} = \frac{P.\,\text{fin.}\,PBp}{BO};$$

$$\text{cof.}\,OBp = \frac{BR}{BO} = \frac{BN + NR}{BO} = \frac{p + P.\,\text{cof.}\,PBp}{BO}.$$

$$\text{Donc } BK = \frac{\text{fin.}\,ABZ\,(p + P.\,\text{cof.}\,PBp) + P.\,\text{cof.}\,ABZ.\,\text{fin.}\,PBp}{\text{fin.}\;ABK}$$

$$= \frac{p.\,\text{fin.}\,ABZ + P\,(\text{fin.}\,ABZ.\,\text{cof.}\,PBp + \text{cof.}\,ABZ.\,\text{fin.}\,PBp)}{\text{fin.}\;ABK}$$

$$= \frac{p.\,\text{fin.}\;ABZ + P.\,\text{fin.}\;(ABZ + PBp)}{\text{fin.}\;ABK}$$

$$= \frac{p.\,\text{fin.}\,ABZ + P.\,\text{fin.}\,ABY}{\text{fin.}\;ABK}.$$

On trouvera de même $Ck = \frac{p'.\,\text{fin.}\,DCZ' + P'.\,\text{fin.}\,DCY'}{\text{fin.}\;DCk}$.

Égalant cette valeur à celle de BK, on aura l'équation

$$(A)\;\frac{p.\,\text{fin.}\,ABZ + P.\,\text{fin.}\,ABY}{\text{fin.}\;ABK} = \frac{p'.\,\text{fin.}\,DCZ' + P'.\,\text{fin.}\,DCY'}{\text{fin.}\;DCk}.$$

qui exprime les conditions de l'équilibre pour trois côtés contigus quelconques du polygone.

(47.) *Remarque.* On comprend affez que les conditions de l'équilibre font les mêmes, & doivent par conféquent s'exprimer de la même manière, foit que le polygone forme une figure continue, foit que, par exemple, on fuppofe que les côtés AS, DX font attachés à des points fixes S, X, & que la partie SVX du polygone n'exifte point; car le polygone étant flexible, l'équilibre doit avoir lieu féparément dans toutes fes parties, n'importe comment les efforts des points extrêmes d'une partie quelconque foient contre-balancés.

(48.) PROBLÈME. *Déterminer la courbe que doit former un vase flexible, chacun de ses points étant supposé sollicité par deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, l'autre parallèle à l'axe des abscisses ou à celui des ordonnées !*

La solution de ce problème se tire du lemme précédent, en supposant que le polygone dont il y est question a une infinité de côtés, ou forme
Fig. 29. une courbe (*Fig. 29*). Que AB, BC, CD soient trois élémens consécutifs de cette courbe; OV, ON les deux axes des coordonnées perpendiculaires; & que les forces P, P' étant perpendiculaires à la courbe, les forces p, p' soient parallèles à l'axe OV. Ayant mené à l'axe ON les ordonnées AL, BL', CL'', supposons $OL = x$, $OL' = x'$, $OL'' = x''$; $AL = y$, $BL' = y'$, $CL'' = y''$; un élément quelconque de la courbe $= ds$, différentielle que je regarderai comme constante; nommons de plus R le rayon de la développée qui répond au point B, & R' celui qui répond au point C. Il est clair qu'on aura ici sin. $ABZ = \frac{dx}{ds}$, sin. $ABY = 1$, sin. $ABK = \frac{ds}{R}$, sin. $DCZ' = \frac{dx''}{ds}$, sin. $DCk = \frac{ds}{R'}$, $P' = P + dP$, $p' = p + dp$; & que par conséquent l'équation (*A*) de l'article 46 deviendra $R(pdx + Pds) = R'[(p + dp)dx'' + (P + dP)ds]$, ou bien (en observant que $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx) = dx + 2ddx + d^3x$;

$R' = R + dR$; effaçant les termes qui se détruisent, & négligeant les infiniment petits qui passent le second ordre),

$$(B)\ p\,dx\,dR + R\,dx\,dp + 2\,R\,p\,ddx + R\,dP\,ds + P\,dR\,ds = 0:$$

équation que l'on intégrera, s'il est possible, lorsque l'on connoîtra la loi des forces P & p, comme on va le voir par quelques exemples.

(49.) COROLLAIRE I. Supposons que la courbe *MANG* soit posée sur un plan horizontal, que les forces p s'évanouissent, & que les forces P, perpendiculaires à la courbe, soient constantes. Alors on aura $p = 0$, $dp = 0$, $P = C$, $dP = 0$; & l'équation (B) deviendra simplement $C\,dR = 0$; ce qui donne pour R une quantité constante, & fait voir que dans cette hypothèse la courbe demandée est un cercle.

Il suit de-là que si l'on emplit de liqueur un vase prismatique vertical, & dont les parois sont parfaitement flexibles, sans être extensibles, le vase prendra la figure d'un cylindre droit; car si l'on décompose sa surface convexe en une infinité d'anneaux par des plans horizontaux, chaque anneau sera pressé perpendiculairement en chacun de ses points par le fluide, avec une force constante, & prendra par conséquent, dans l'état d'équilibre, la figure d'un cercle.

(50.) COROLLAIRE II. Que la courbe *MAN*, considérée comme uniformément pesante, soit située dans un plan vertical, & attachée en

M & *N* à deux points fixes de niveau, la partie *MGN* étant supprimée. La surface *MN* du fluide est horizontale ; les forces *P*, qui expriment les pressions perpendiculaires de ce fluide en chaque point des parois du vase, sont proportionnelles aux lignes verticales *BL'*, & les forces *p* sont les poids des élémens de la courbe. Nommons *g* la gravité, *b* la largeur de la surface sur laquelle s'exerce la pression du fluide ; c^2 l'aire de la section perpendiculaire à la corde regardée comme cylindrique. On aura $P = gby'ds = gb(y + dy)ds$, $dP = gb(dy + ddy)ds$, $p = gc^2 ds$, $dp = 0$. Substituant ces valeurs dans l'équation *(B)*, elle deviendra $c^2 dx dR + 2Rc^2 ddx + bRdyds + bydRds = 0$, ou bien $c^2 dxdR + c^2 Rddx + bRdyds + bydRds = - c^2 Rddx$, ou (en mettant pour *R* sa valeur $\frac{dsdy}{ddx}$ dans le second membre), $c^2 dxdR + c^2 Rddx + bRdyds + bydRds = - c^2 dsdy$, dont l'intégrale est $c^2 Rdx + byRds = Ads - c^2 yds$. Éliminant *R*, on aura $c^2 dxdyds + c^2 ydsddx = Adsddx - bydyds^2$, dont l'intégrale est $c^2 ydxds = Bds^2 + Adxds - \frac{by^2 ds^2}{2}$, équation d'où l'on tire enfin celle-ci

$$dx = \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[(2c^2 y - 2A)^2 - (2B - by^2)^2]}},$$

laquelle s'intègre en général par les quadratures des courbes. Cette intégration introduira dans le calcul une troisième constante *C*. Pour déterminer

les trois constantes A, B, C, on observera 1.° que $y = 0$, donne $x = 0$, ou $x =$ une quantité déterminée, puisqu'on est maître de placer à volonté l'origine de la courbe ; 2.° que les points extrêmes M & N sont donnés de position ; 3.° que la longueur de la corde MAN est donnée ; ou que la courbe fait, par exemple, en M un angle donné avec l'axe MN ; ou qu'elle satisfait à quelque condition équivalente.

(51.) Corollaire III. Si dans l'hypothèse de l'article précédent, on a $A = 0$, $B = 0$, on trouvera $x = C \pm \sqrt{(\frac{c^4}{b^2} - y^2)}$, équation au cercle.

(52.) Corollaire IV. La même hypothèse de l'article 50 étant d'abord reprise en général :

1.° Si l'on fait $c^2 = 0$, ou si la courbe MAN peut être regardée comme non pesante, on aura $dx = \frac{(2B - by^2)\,dy}{\sqrt{[4A^2 - (2B - by^2)^2]}}$, équation de la *lintéaire* commune.

2.° Si l'on fait $b = 0$, ou que la liqueur puisse être regardée comme non pesante, on aura $dx = \frac{B\,dy}{\sqrt{[(c^2y - A)^2 - B^2]}}$, équation de la *chaînette*.

(53.) Scholie. Il seroit facile d'appliquer cette théorie à la recherche de la figure d'une *vessie* gonflée par l'air, d'un *outre* rempli de vin, &c, si l'on connoissoit la loi suivant laquelle s'étendent les fibres dont ces sortes de vases sont

composés. Les conditions de l'équilibre s'établissent toujours de la même manière, quelle que puisse être la nature de la surface du vase flexible. La seule difficulté est d'intégrer les équations auxquelles on est conduit. Comme tous les calculs de cette espèce portent sur des principes un peu hypothétiques, & qu'ils n'appartiennent pas proprement à l'Hydrostatique, je ne m'y arrêterai pas davantage.

Le premier problème qu'on ait résolu sur cette matière, est celui d'un vase flexible soumis à la pression d'un fluide pesant : il le fut, en 1692, par les deux illustres frères Jacques & Jean Bernoulli. Depuis ce temps-là, Daniel Bernoulli, Euler & d'autres Géomètres, ont étendu & généralisé les mêmes questions, dans les Mémoires des Académies de Péterſbourg, de Berlin, &c.



CHAPITRE VI.

Des Fluides élaſtiques, & en particulier de l'équilibre de l'air ; principes d'expérience, ſur leſquels cet équilibre eſt fondé.

(54.) LES fluides élaſtiques ont, comme fluides, toutes les propriétés de ces ſortes de corps ; & on peut à cet égard leur appliquer les propoſitions générales que nous avons établies ſur l'équilibre des fluides. Mais ils ont de plus d'autres propriétés particulières, dépendantes de la vertu élaſtique, ou de cette faculté par laquelle ils diminuent ou augmentent de volume, ſelon qu'ils ſont plus ou moins comprimés.

De tous les fluides élaſtiques, l'air eſt le plus connu, le plus répandu, l'agent le plus univerſel dans la Phyſique & la Mécanique. Nous allons donc examiner ici les propriétés dont il eſt doué, tant parce qu'il mérite cette diſtinction, que pour fixer les idées, & que d'ailleurs on appliquera facilement la même théorie aux autres eſpèces de fluides élaſtiques.

(55.) THÉORÈME I. *L'air eſt un fluide peſant.*

En effet, la peſanteur eſt une force univerſelle répandue dans la Nature, & il n'y a point de corps qui ne lui ſoit ſoumis. Tous les phénomènes terreſtres & céleſtes prouvent cette vérité. La

pesanteur de l'air, dont il s'agit ici, est démontrée à tous les yeux, par la suspension de la colonne de mercure dans le tube d'un Baromètre.

Les anciens Philosophes ne connoissoient point la pesanteur de l'air. Ils admettoient dans la Nature deux sortes de corps, les corps *pesans*, tels qu'une pierre, un morceau de plomb, & en général tous les corps qui étant abandonnés à eux-mêmes descendent vers la terre; & les corps *légers*, comme l'air, la flamme, &c, parce que ces corps semblent s'éloigner de la terre & s'élever dans les parties supérieures : on ignoroit alors que cette ascension est produite, ou par leur élasticité, ou par l'action d'autres corps plus massifs & plus pesans, qui tendent à gagner le bas & à repousser en haut les fluides dont ils viennent occuper la place. On doit à Galilée l'opinion ou la pensée, que l'air est un fluide pesant; mais son disciple Toricelli est le premier qui ait démontré cette proposition par la voie de l'expérience. Déjà porté à croire, d'après les principes de Galilée, que l'eau s'élevoit dans les pompes en vertu de la pression de l'atmosphère, & jugeant en conséquence qu'un fluide plus dense ou plus pesant que l'eau s'éleveroit moins haut à proportion, dans un tube vide d'air, il prit un tuyau de verre *AB*
Fig. 30. (*Fig. 30*), d'environ trois pieds de longueur, ouvert par le bout *A*, & fermé par le bout *B*; il le remplit de mercure : ensuite ayant bouché le bout *A* avec le doigt, il renversa le tube, de manière que le bout *B* étoit en haut, le bout *A*

en bas, & plongé dans une cuvette *MCN* qui contenoit déjà du mercure; enfin il retira son doigt, pour abandonner la colonne de mercure à l'action de la pesanteur. Alors, après quelques mouvemens d'oscillation, la colonne de mercure *AE*, se tint immobile, à la hauteur d'environ 28 pouces au-dessus de la surface du mercure de la cuvette *MCN*. De-là Toricelli conclut avec raison que la colonne de mercure demeure ainsi suspendue dans le tube, en vertu de la pression de l'air extérieur sur la surface du mercure contenu dans la cuvette *MCN*, pression qui n'a pas lieu sur la colonne contenue dans le tube dont le bout supérieur *B* est fermé hermétiquement. En effet, si l'on ouvre ce bout, pour permettre à l'air d'entrer dans le tube, la colonne tombe aussi-tôt & se répand dans la cuvette. Nos Baromètres ordinaires ne sont autre chose que le tube de Toricelli en expérience continuelle. Je n'ai pas besoin de faire observer que la conclusion est la même, soit qu'on suppose que l'air agisse immédiatement par son poids sur la surface du mercure de la cuvette, ou qu'il agisse par son ressort, puisque dans ce dernier cas l'élasticité est produite par la compression ou le poids de l'air supérieur.

(56.) *REMARQUE I.* La hauteur du mercure dans le tube du Baromètre est différente & plus ou moins grande, selon que les lieux sont moins ou plus élevés par rapport à un même niveau, tel, par exemple, que celui de la mer. La

première expérience de ce genre est celle que Pascal fit exécuter sur la montagne du Puy-de-Dome, voisine de Clermont en Auvergne. Du pied au sommet de cette montagne, qui est élevée d'environ 500 toises au-dessus de Clermont, le mercure baissa dans le tube de trois pouces une ligne & demie. Nous indiquerons ci-dessous la cause de cette variation.

(57.) *REMARQUE II.* Dans un même lieu, la hauteur du mercure dans le Baromètre n'est pas constante : elle change à raison des changemens qui arrivent dans le poids ou le ressort de l'atmosphère, par la pluie, par les vents, &c. Nous reviendrons sur cet objet.

(58.) COROLLAIRE I. L'air étant ainsi pesant, & sa pression sur chaque point de la surface de la Terre étant équivalente au poids d'un filet de mercure, dont je suppose qu'on connoisse la hauteur moyenne, il est facile de trouver le poids de toute la masse d'air qui environne le globe terrestre. Car soient R le rayon du globe terrestre ; r la hauteur donnée du filet de mercure dont on vient de parler ; π le rapport de la circonférence au diamètre ; ϖ la pesanteur spécifique du mercure, c'est-à-dire, par exemple, le poids d'un pied cube de mercure, en prenant le pied cube pour l'unité de volume. On cherchera les solides de deux sphères, dont l'une a pour rayon $R + r$, l'autre R ; & on retranchera le second solide du premier ; ce qui donnera

$\frac{4\Pi(R+r)^3}{3} - \frac{4\Pi R^3}{3}$ ou $4\Pi(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3})$ pour reſte, qui étant réduit en pieds cubes, & puis multiplié par ϖ, ou par le poids d'un pied cube de mercure, donnera le poids de l'atmoſphère.

Dans ce calcul, on peut négliger, pour abréger, les termes qui contiennent r^2 & r^3, comme très-petits par rapport au premier.

Par exemple, ſoient $r = 28$ pouces ; le poids d'un pied cube de mercure $= 980$ livres. Suppoſons de plus, ſuivant les obſervations, que chaque degré d'un grand cercle de la Terre eſt de 57000 toiſes. On trouvera, en effectuant les calculs indiqués par la formule $4\Pi R^2 r$, que le poids total de l'atmoſphère eſt d'environ 11028982149818181818 livres.

(59.) COROLLAIRE II. Deux colonnes, l'une de mercure, l'autre d'eau, qui ſe font mutuellement équilibre, ont des hauteurs réciproquement proportionnelles à leurs peſanteurs ſpécifiques (33) ; en ſorte que ſi la colonne de mercure a 28 pouces de hauteur, celle d'eau doit avoir environ 32 pieds de hauteur. Or, la preſſion de l'atmoſphère contre-balance la première de ces deux colonnes, comme nous venons de le voir ; donc elle contre-balancera auſſi la ſeconde. Ainſi dans le vide, la preſſion de l'atmoſphère doit ſoutenir une colonne d'eau d'environ 32 pieds de hauteur.

Si vous en voulez directement la preuve par l'expérience, ayez un tuyau ou corps de pompe vertical *QH* (*Fig. 31*), plongé dans l'eau *MCDN* par le bout *Q* qui eſt ouvert; faites gliſſer de bas en haut, le long de ce tuyau, un piſton maſſif *KO*, qui en rempliſſe exactement la capacité : l'eau montera dans le tuyau, juſqu'à ce qu'elle ſoit élevée au-deſſus du niveau *MN*, d'environ 32 pieds; après quoi elle s'arrêtera, quoique le piſton continue de monter. On en voit la raiſon. Le piſton en montant laiſſe après lui un vide dans lequel l'air extérieur ne peut pas entrer, & la preſſion libre de cet air ſur la ſurface *MN* du réſervoir, force l'eau à paſſer par l'ouverture *Q*, & à s'élever dans le tuyau. L'eau s'arrête à la hauteur de 32 pieds, parce qu'alors ſon poids eſt en équilibre avec la preſſion de l'atmoſphère.

Fig. 31.

(60.) COROLLAIRE III. Suppoſons que dans l'expérience précédente, l'eau ſoit parvenue à ſa plus grande hauteur *AB*; qu'enſuite on élève encore le piſton, & qu'il ſe faſſe entre la ſurface *BT* de l'eau & la baſe du piſton, un vide tel que *BP*. Cela poſé, ſi l'on fait entre les points *A* & *B* une ouverture latérale *E* au tuyau, l'air extérieur entrera avec force par cette ouverture, & diviſera en deux parties *AF*, *ET*, la colonne *AT* qui eſt compoſée de molécules très-mobiles. La première *AF* retombera, par ſa peſanteur, dans le réſervoir *MCDN*, parce que la preſſion de l'air qui entre par *E* eſt en équilibre

/ec la preſſion de l'air qui tend à faire monter eau par le bout *Q* du tuyau. Mais la ſeconde artie *ET* étant pouſſée par l'air qui entre par *E* : qui agit en toutes ſortes de ſens, de bas en aut comme de haut en bas, montera néceſſaire-ient dans l'eſpace vide *BP* qui eſt au-deſſus. Il n eſt de cette élévation de la colonne *ET*, comme e la ſuſpenſion de l'eau contenue dans une bou-:ille renverſée dont le goulot eſt ouvert. L'eau ſt ſoutenue dans la bouteille par la preſſion de air extérieur contre le goulot.

Par-là on explique l'expérience de la pompe de éville, faite en 1766. Un Ferblantier de cette ille ayant entrepris de faire monter l'eau à la auteur de 60 pieds, par le moyen d'une pompe ſpirante ordinaire, & ne pouvant réuſſir à obtenir et effet, donna de dépit un coup de marteau au uyau d'aſpiration, & y fit un trou d'environ une gne de diamètre, à 10 pieds au-deſſus du réſervoir. Alors l'eau monta rapidement à la hauteur de 60 ieds. En continuant de pomper, le trou latéral tant fermé, puis d'ouvrir ce trou, ainſi de ſuite lternativement, on formera un jet d'eau inter-nittent, à une hauteur qui pourroit excéder con-idérablement 60 pieds, comme on le verra ci-leſſous. Cette expérience a été répétée & variée le pluſieurs manières en France; on y a ſubſtitué lu mercure à l'eau, afin de pouvoir employer des uyaux plus courts & faciliter les manœuvres. (*Mém. le l'Acad. des Sc. de Paris, an. 1766,* page 431).

Les pompes de cette eſpèce, & toutes celles qui tiennent au même principe, ont l'inconvénient de demander une mécanique particulière pour la manœuvre du robinet deſtiné à fermer & à ouvrir le trou *E*, & de donner (à force motrice égale), moins d'eau que les pompes ordinaires. On conçoit en effet qu'à l'air déjà contenu dans la colonne d'eau *ET*, il ſe mêle encore des globules provenans de celui qui entre par l'ouverture *E*; que tout cet air, par ſa force expanſive qui agit en tous ſens, détache une partie de la colonne d'eau *ET*, & la livre à l'action de la peſanteur dirigée de haut en bas; & que cet effet, nuiſible au produit de la pompe, ſera d'autant plus ſenſible, que la pompe aura un plus grand diamètre.

Fig. 32. (61.) COROLLAIRE IV. Soit *ABHO* (*Fig. 32*), un ſiphon recourbé & compoſé de deux branches d'inégale longueur; qu'on plonge la plus courte *BA* dans la liqueur *CN* d'un tonneau *CD*, & qu'on ôte l'air contenu dans l'intérieur du ſiphon, en le ſuçant par le bout *O*; alors la liqueur du tonneau montera dans le ſiphon & ſortira par le bout *O*, pourvu que ce bout ſoit au-deſſous de la ſurface *MN* de la liqueur du tonneau.

Ce phénomène eſt le même que celui du Baromètre. En effet, imaginons que le bout *O* du ſiphon eſt plongé dans un vaſe *E F* qui contient de la liqueur. On voit que chacune des parties *A B*, *O H* du ſiphon peut être regardée comme un tube

un tube particulier, pareil à celui de Toricelli. Ainsi en représentant la pression de l'atmosphère par KX, le poids de la colonne fluide AB par KV, celui de la colonne HO par KZ; il est clair que VX exprime la force qui soulève le fluide dans le tuyau AB, & que ZX exprime la force qui tend à soulever le fluide dans le tuyau OH. Or, comme ces deux dernières forces sont contraires, la plus foible est détruite; & ZV est la force restante qui produit l'écoulement dans le sens $ABHO$.

On voit par-là, 1.° que si $KV = KZ$, il ne peut pas y avoir d'écoulement. 2.° Que si le poids de la plus courte branche est plus grand que celui de l'atmosphère, il n'y aura pas d'écoulement, parce qu'alors la pression de l'atmosphère n'a pas la force suffisante pour soulever la liqueur jusqu'en B. Ainsi, par exemple, si la liqueur est de l'eau, il faut que la hauteur de la plus courte branche AB soit de moins de 32 pieds; pour le mercure, AB doit être moins de 28 pouces, &c.

Ce mécanisme du siphon recourbé, à branches inégales, sert à expliquer le jeu de certaines fontaines *intermittentes* ou *réciproques*. On sait, en général, que les fontaines & les rivières ont leurs sources dans de vastes réservoirs d'eaux, creusés par la Nature dans l'intérieur & au pied des montagnes, lesquels sont alimentés par les eaux pluviales qui tombent sur la croupe de la montagne & dans les environs, & qui pénètrent par les crevasses du terrein jusqu'au réservoir, d'où elles s'écoulent

pour former la fontaine, la rivière, &c. Si les eaux pluviales recueillies dans le réservoir sont en quantité suffisante pour fournir toujours à cette dépense, le cours de la fontaine ou de la rivière sera continuel; sinon il sera intermittent & subordonné aux temps de pluie & de sécheresse. Mais les fontaines réciproques dont il est ici question, Fig. 33. ont une autre cause. Soit *MANE (Fig. 33)*, un réservoir placé au pied d'une montagne, & nourri par les eaux pluviales; à la place du produit de ces eaux, je substitue, par la pensée, celui d'un tuyau *KS*, qui en verseroit la même quantité par l'ouverture *S* dans le réservoir *MANE*. Supposons que les eaux de ce réservoir s'échappent par l'endroit *A*, d'où part une décharge *ABHO*, semblable à un siphon recourbé, dont la plus petite branche est *AB*, comme dans la *Figure 32*. L'eau versée par le tuyau *KS* dans le réservoir *MANE*, s'y élèvera successivement; elle montera aussi dans le tuyau *AB*, d'où elle chassera l'air: quand son niveau *MN* sera arrivé à la hauteur du point *B*, elle s'écoulera par la branche *BHO*; & on voit que cet écoulement seroit continuel, si la quantité d'eau fournie par *KS* étoit supérieure ou au moins égale à la quantité débitée par *HO*. Mais supposons que la première quantité soit inférieure à la seconde; alors le niveau *MN* s'abaisse progressivement, & néanmoins l'écoulement par *HO* continue d'avoir lieu, comme celui du siphon de la *Figure 32*, tant que l'eau couvre le trou *A*; mais quand le

trou *A* eſt enfin découvert, & quand l'air s'eſt introduit par ce trou dans le ſiphon *ABHO*, l'écoulement en *O* ceſſe. Mais le tuyau *KS* continuant à verſer de l'eau dans le réſervoir, elle s'y élève de nouveau à la hauteur du point *B*; d'où réſulte un nouvel écoulement ſemblable au premier, & qui finit de même; ainſi de ſuite. Le cours de la fontaine eſt donc intermittent ou réciproque.

On voit que ces ſortes de fontaines peuvent être ſuſceptibles de pluſieurs variétés, par la combinaiſon de pluſieurs réſervoirs & de pluſieurs ſiphons recourbés.

(62.) THÉORÈME II. *L'air eſt un fluide élaſtique.*

Qu'on prenne une veſſie & qu'on la gonfle en y introduiſant de l'air, on aura un ballon qui ſe comprime lorſqu'on le preſſe, & qui ſe dilate lorſqu'on ceſſe de le preſſer. Donc, &c.

(63.) THÉORÈME III. *La force élaſtique de l'air comprimé eſt égale à celle qui produit la compreſſion.*

La fontaine de *Héron* en fournit la preuve. Cette machine (*Fig. 34*), qu'on fait ordinairement avec du fer-blanc, eſt compoſée d'une caiſſe *ABCD*, fermée de tous côtés, pleine d'eau juſqu'en *EF* un peu au-deſſous de *AB*; d'une autre caiſſe *GHKI*, auſſi fermée de tous côtés, égale à la première, & pleine d'air; d'un tuyau *OT* ſoudé exactement avec les platines *AB*, *DC*, *GH*, lequel communique au dehors par le bout *O*, & avec la caiſſe Fig. 34.

inférieure par le bout T qui eſt très-près du fond IK; d'un tuyau XY ſoudé aux deux caiſſes, & dont le bout ſupérieur X eſt près du fond AB; d'un tuyau QP dont le bout inférieur P eſt proche le fond DC, & le bout ſupérieur Q, ſoudé avec le fond AB, eſt garni d'un ajutage. Cela poſé, fermez l'ajutage Q avec le doigt, ou avec un robinet; verſez un peu d'eau par le bout O du tuyau OT; elle deſcendra juſqu'en IK, & montera, par exemple, en VS. Alors il n'y aura plus aucune communication de l'air extérieur avec celui qui reſte dans les deux caiſſes. Continuez à verſer de l'eau; l'air contenu dans les eſpaces $GHSV$, XY, $ABFE$, ſe condenſera peu à-peu juſqu'à ce que ſa force élaſtique ſoit en équilibre avec la preſſion de l'eau verſée par OT. Si la ſurface de l'eau dans la caiſſe $GHKI$ eſt MN, l'air dont on vient de parler preſſera perpendiculairement chaque partie de la ſurface qui l'environne avec une force égale au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour baſe la partie preſſée, & OL pour hauteur. Ainſi la ſurface EF de l'eau contenue dans la caiſſe ſupérieure, eſt pouſſée de haut en bas par ce même air, & l'eau tend à s'élever par le tuyau PQ; de ſorte que ſi on vient à ouvrir l'ajutage, il ſortira un jet d'eau qui s'élèvera à la hauteur RZ égale à OL. Cette hauteur produite par le reſſort de l'air, eſt celle que produiroit le poids de la colonne OL, comme on le verra dans l'Hydraulique.

On peut remarquer qu'en faiſant rentrer par O

'eau qui tombe du jet, cette eau passe dans la caisse ıférieure, & que par conséquent le jet durera jusu'à ce que toute l'eau comprise depuis le point P ısqu'en EF soit sortie en jaillissant.

(64.) THÉORÈME IV. *L'air se comprime ıi-même par son propre poids.*

Car l'air étant un fluide pesant, si l'on conçoit 'atmosphère partagée en une infinité de tranches, ›u plutôt de couches perpendiculaires à la direction e la pesanteur, il est évident que les couches inféieures seront chargées du poids des supérieures; 'où résultera nécessairement une compression qui ›ra plus grande, toutes choses d'ailleurs égales, mesure que la couche comprimée sera placée plus ›as dans l'atmosphère.

Je dis *toutes choses d'ailleurs égales*, car il y a 'autres causes, comme le froid & le chaud, qui oncourent à comprimer & à dilater l'air. La densité le ce fluide est extrêmement variable; elle est en-›iron huit ou neuf cents fois moindre que celle de 'eau ordinaire. Le rapport moyen de ces densités, lans nos climats, peut s'exprimer sensiblement par a fraction $\frac{1}{850}$.

(65.) COROLLAIRE. De-là & de l'article 63, l suit que si l'air, après s'être comprimé lui-même ›ar son propre poids, vient à agir par son seul 'effort, il produira le même effet qu'il produisoit ›ar son poids. Cela est confirmé par l'expérience ›ue voici.

Fig. 35. Prenez une bouteille de verre *ABCD* (*Fig.* 35), de figure cylindrique; verſez-y du mercure *AEFD*; faites-y entrer un petit tuyau de verre *K*, de 29 ou 30 pouces de hauteur, ouvert par les deux bouts, & dont celui d'en bas trempe de quelques lignes dans le mercure; ſcellez ce tuyau exactement au col de la bouteille, de manière que l'air contenu dans l'eſpace *EBCF* n'ait aucune communication avec l'air extérieur; mettez enſuite cette bouteille & ſon tuyau ſous le récipient *LIHM* de la machine pneumatique; pompez, autant qu'il ſera poſſible, l'air contenu dans ce récipient: alors le mercure s'abaiſſera en *NO*, & il s'élèvera dans le tuyau au-deſſus de *NO*, à-peu-près à la même hauteur qu'il ſe ſoutient dans le Baromètre, dans l'endroit où l'on fait l'expérience. La raiſon en eſt évidente; car avant que de commencer à faire le vide dans la machine pneumatique, l'air contenu dans l'eſpace *EBCF* eſt dans le même état que l'air extérieur; lorſqu'enſuite on vient à faire le vide ſous le récipient, le même air *EBCF* déploie ſon reſſort, force en conſéquence le mercure à s'abaiſſer en *NO* & à monter dans le tuyau vide; & cette aſcenſion eſt à peu-près égale à celle qui eſt produite dans le baromètre par le poids de l'air. Je dis *à peu-près*, parce qu'il n'eſt jamais poſſible de vider parfaitement d'air le récipient de la machine pneumatique.

(66.) THÉORÈME V. *Si l'on comprime une même maſſe ou quantité d'air, & qu'on la réduiſe à*

occuper différens espaces ou volumes, ces volumes seront entr'eux en raison inverse des forces comprimantes.

Cette proposition se prouve par l'expérience suivante, qui est très-connue des Physiciens, & que M. Mariotte a faite le premier. Soit *ABC* (*Fig. 36*), un tuyau de verre recourbé, fermé Fig. 36. hermétiquement par le bout *C*, & ouvert par le bout *A*. Les deux branches *DA*, *EC* sont verticales; mais la branche *DE* de jonction est horizontale. On donne ordinairement trois ou quatre lignes de diamètre intérieur à ce tuyau. La petite branche *EC* doit être parfaitement cylindrique pour pouvoir comparer exactement entr'eux les différens volumes de la masse d'air qu'on y condense. Nous supposons qu'elle ait 12 pouces de hauteur; l'autre *DA* est beaucoup plus haute. Versez légèrement dans le tube un peu de mercure pour remplir la branche horizontale, & faites en sorte que les deux surfaces *DV*, *IE* de ce fluide, dans les deux branches verticales, soient de niveau, afin que l'air enfermé dans l'espace *EC* soit dans le même état que l'air extérieur; car il est évident que si le ressort de l'air intérieur *EC* étoit plus ou moins tendu que celui de l'air extérieur, les surfaces *IE*, *DV* seroient inégalement pressées, & que par conséquent elles ne pourroient pas être de niveau. Continuez ensuite à verser du mercure dans la branche *DA*; & vous verrez qu'à mesure qu'il s'élèvera en *H*, la surface *EI* s'élèvera en *F*. En supposant que la pression de

l'atmosphère soit équivalente au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur, vous trouverez que si, ayant mené l'horizontale *FG*, la hauteur *GH* = 14 pouces, la hauteur *FC* de l'espace occupé par l'air sera = 8 pouces; si *GH* = 28 pouces, *FC* sera = 6 pouces; &c. Or il suit de-là que les différens volumes de l'air enfermé d'abord dans *EC*, suivent la raison inverse des poids comprimans; car au premier instant où cet air ne supporte que la pression de l'atmosphère, il peut être regardé comme chargé du poids d'une colonne de mercure, haute de 28 pouces; lorsqu'on met ensuite dans la branche *DA*, du mercure à la hauteur de 14 pouces au-dessus de la ligne de niveau *FG*, la pression que souffre notre masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure, qui a 28 pouces + 14 pouces, ou 42 pouces de hauteur; lorsque la hauteur du mercure dans la branche *DA*, au-dessus de *FG*, est 28 pouces, la pression de la même masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure qui a 28 pouces + 14 pouces + 14 pouces, ou en tout 56 pouces, de hauteur, &c. D'où l'on voit que les poids comprimans étant représentés par les nombres 28, 42, 56, les volumes de la masse d'air sont exprimés par les nombres 12, 8, 6. Or, on a ces différentes proportions, 12 : 8 :: 42 : 28; 12 : 6 :: 56 : 28; 8 : 6 :: 56 : 42. Donc les volumes suivent la raison renversée des poids comprimans.

On fera des raiſonnemens analogues pour des hauteurs de mercure qui ſuivroient tout autre rapport dans les deux branches du tube ; & ces raiſonnemens, fondés ſur l'expérience, aboutiront à la même concluſion finale.

Toutes ces expériences doivent être faites de manière que l'air enfermé en *EC* ait la même température que l'air extérieur, & que par conſéquent ſon volume ne varie qu'à raiſon des poids comprimans. Sans cette précaution, le chaud & le froid n'agiſſant pas de même ſur les deux airs, changeroient les réſultats, & il ſeroit difficile de ſéparer, par une méthode ſûre & non hypothétique, leurs effets d'avec ceux des poids comprimans.

(67.) COROLLAIRE I. Puiſque la force élaſtique de l'air eſt égale à la force qui le comprime (63), il s'enſuit que les différentes forces élaſtiques d'une même maſſe d'air, à qui l'on fait occuper différens volumes, ſont en raiſon inverſe de ces volumes.

(68.) COROLL. II. On voit par l'article V des *NOTIONS GÉNÉRALES*, que ſous même maſſe, les denſités ſont en raiſon inverſe des volumes. Ainſi, quand une même maſſe d'air occupe ſucceſſivement différens volumes, les forces qui la compriment, ou les forces élaſtiques qu'elle a en conſéquence, ſont proportionnelles à ſes denſités dans ces différens états. Il exiſte donc toujours, pour une même maſſe d'air, cette loi générale

entre les volumes, les forces élaſtiques & les denſités, que les volumes venant à diminuer ou à augmenter par un moyen quelconque, les forces élaſtiques & les denſités augmentent ou diminuent proportionnellement.

(69.) COROLLAIRE III. Par-là on trouve la loi que ſuivent les dilatations de l'air dans la machine pneumatique.

On ſait que les principales pièces de la machine pneumatique ordinaire, dont il eſt ici queſtion, & à laquelle on peut rapporter toutes les autres, ſont le récipient, la platine, le corps de pompe, le piſton qui ſe hauſſe & ſe baiſſe le long du corps de pompe, & un robinet percé de manière qu'étant tourné dans un certain ſens, il permet la communication du récipient avec le corps de pompe, ſans la permettre avec l'air extérieur; & qu'étant tourné dans un autre ſens, il permet la communication de l'air extérieur avec le corps de pompe, ſans la permettre avec le récipient.

Cela poſé, ayant nommé A la ſomme des capacités du récipient & de la partie ſupérieure du corps de pompe qui demeure vide lorſque le piſton eſt hauſſé; B la ſomme des capacités du récipient & du vide du corps de pompe, lorſque le piſton eſt baiſſé; n le nombre de fois qu'on fait jouer le piſton; $\frac{m}{1}$ le rapport de la denſité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur & raréfié après le nombre n de

coups de piston : supposons qu'au premier instant le piston soit haussé, le robinet ouvert en-dehors & fermé du côté du récipient; qu'alors on applique le récipient sur la platine. Il est clair qu'en ce moment, la densité de l'air contenu dans l'espace A est la même que celle de l'air extérieur ; je la représente par D. Maintenant si l'on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient, & qu'on baisse le piston ; l'air contenu dans l'espace A se dilatera en vertu de sa force élastique, & se répandra uniformément dans l'espace B. De plus, la densité qu'il aura dans l'espace B, sera à la densité qu'il avoit dans l'espace A, réciproquement comme A est à B, puisque la masse demeure la même, Faisant donc cette proportion $B : A :: D$: un quatrième terme ; ce quatrième terme $D \times \frac{A}{B}$ exprime la densité de l'air intérieur après le premier coup de piston. Pareillement, si après avoir fermé le robinet du côté du récipient, ouvert le robinet en dehors & élevé le piston, on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient & qu'on abaisse une seconde fois le piston, l'air contenu dans l'espace A, & dont la densité est $D \times \frac{A}{B}$, se répandra dans l'espace B, de manière que faisant cette proportion, $B : A :: D \times \frac{A}{B}$: un quatrième terme, ce quatrième terme $D \times \frac{A^2}{B^2}$ exprime la densité de l'air intérieur, après le second

coup de piston. En continuant à raisonner de même, on voit que la densité de l'air intérieur après le troisième coup de piston, est exprimée par $D \times \frac{A^3}{B^3}$; que la densité après le quatrième coup de piston est exprimée par $D \times \frac{A^4}{B^4}$; & qu'après le nombre n de coups de piston la densité est exprimée par $D \times \frac{A^n}{B^n}$. On aura donc, par hypothèse, cette proportion $D : D \times \frac{A^n}{B^n} :: m : 1$; d'où l'on tire $m \times A^n = B^n$. Prenant les logarithmes de chaque membre, on aura $\log. (m \times A^n) = \log. B^n$, ou bien, $\log. m + n . \log. A = n . \log. B$. D'où l'on voit que si parmi les quatre quantités m, n, A, B que cette équation renferme, on en connoît trois, on pourra trouver la quatrième; ce qui donne la solution des questions suivantes.

I. *Connoissant les capacités* A *&* B, *& le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, trouver le nombre* n *de coups de piston!*

L'équation précédente donne celle-ci $n = \frac{\log. m.}{\log. B - \log. A}$ qui résout la question.

Par exemple, soient $A = 5$, $B = 7$, $m = 4$; on trouvera $n = \frac{60206}{14613} = 4\frac{1}{8}$ à peu-près.

II. *Connoissant les capacités* A *&* B, *le nombre* n *de coups de piston, trouver le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur!*

Cette queſtion ſe réſout par l'équation $\log. m = n \times (\log. B - \log. A)$.

Par exemple, ſoient $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$: on trouvera $\log. m = 1,46128$, & par conſéquent $m = 29$ environ.

III. *Connoiſſant le rapport* m *de la denſité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piſton, la capacité* A, *trouver la capacité* B!

Cette queſtion ſe réſout par l'équation $\log. B = \frac{\log. m + n \log. A}{n}$.

Par exemple, ſoient $m = 29$, $n = 6$, $A = 5$: on trouvera $\log. B = 0,94270$, & par conſéquent $B = 9$ environ.

IV. *Connoiſſant le rapport* m *de la denſité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piſton, la capacité* B, *trouver la capacité* A!

Cette queſtion ſe réſout par l'équation $\log. A = \frac{n \log. B - \log. m}{n}$.

Par exemple, ſoient $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$: on trouvera $\log. A = 0,68261$, & par conſéquent $A = 5$ environ.

Les mêmes principes ſervent à expliquer l'équilibre des pompes, comme on le verra bientôt.

(70.) SCHOLIE. La propoſition que *l'air ſe comprime ſuivant la proportion des poids dont il eſt chargé,* & les conſéquences qui en réſultent, ne doivent pas être regardées comme généralement vraies en toute rigueur; car dans les expériences

qui ont ſervi juſqu'ici de baſe à cette règle, on n'a employé que des condenſations de moyenne force. Mais on ſent que cette règle ne peut être exacte dans les cas extrêmes. En effet, imaginons d'abord que la compreſſion augmente à l'infini : il faudroit que la condenſation augmentât de même, & qu'enfin l'air n'occupât plus qu'un eſpace infiniment petit. Or, quelque figure qu'on attribue aux molécules aériennes ; il eſt clair que lorſque leurs reſſorts ont été comprimés juſqu'à ce que toutes leurs parties ſe touchent, l'impénétrabilité mutuelle de ces parties ne permet plus de compreſſion. Ajoutez que l'air peut être mêlé de parties dures, dénuées de reſſort, ou douées d'un reſſort très-imparfait. Si au contraire on ſuppoſe que la compreſſion diminue à l'infini, on ne peut pas ſuppoſer de même que l'air ſe dilate à l'infini ; car le reſſort parfait ou imparfait des molécules aériennes, ne peut avoir qu'une extenſion déterminée, & il eſt impoſſible de concevoir qu'une maſſe finie vienne à occuper un eſpace infini. Il n'eſt donc pas vrai, en rigueur, que les condenſations de l'air ſuivent généralement le rapport des poids comprimans. Mais comme les forces comprimantes que nous pouvons employer dans nos expériences, ne paſſent jamais certaines limites, la propoſition de l'article 66 peut alors être regardée comme vraie ſans reſtriction.

CHAPITRE VII.

Élémens de la Statique des Pompes.

71.) ON fait un si grand usage des pompes, ue je crois devoir expliquer avec quelque détail ι théorie de l'équilibre de ces machines.

Les pompes, en général, sont des tuyaux desnés à élever l'eau à une certaine hauteur, au ıoyen d'un principe moteur quelconque qui met n jeu le poids ou le ressort de l'air, & qui fait ervir ce poids ou ce ressort de véhicule à son .ction sur l'eau qu'il s'agit d'élever.

Il y a trois espèces principales de pompes : la ›ompe *aspirante*, la pompe *foulante*, & la pompe ȷui est tout-à-la-fois *aspirante & foulante*. Toutes es machines de cette espèce ne font que des com›inaisons des trois qu'on vient de nommer, comme lans la mécanique ordinaire les machines composées ıe sont que des combinaisons des sept machines imples & primordiales.

Pompe aspirante.

(72.) La pompe aspirante (*Fig. 37*) est composée de deux tuyaux verticaux $AMNC$, $ABDC$, qui ont le même axe, & qui s'assemblent en AC. Le premier, qui trempe dans l'eau, s'appelle *tuyau d'aspiration*; le second se nomme *corps de pompe*. Fig. 37.

En *A C* eſt une cloiſon ou *diaphragme* percé d'un trou, couvert par une *ſoupape E* qui s'ouvre de bas en haut. Dans le corps de pompe, monte & deſcend alternativement un piſton, dont la tige *Z* eſt mue par un levier, ou de toute autre manière qu'on voudra. La tête de ce piſton eſt percée dans la direction de ſon axe, d'un trou, couvert par une ſoupape *F* qui s'ouvre de bas en haut. Il parcourt dans ſon jeu un certain eſpace, dont je ſuppoſe que *G K* eſt la hauteur, c'eſt-à-dire, que le piſton étant baiſſé, ſa baſe inférieure eſt dans le plan horizontal *G H*, & qu'étant hauſſé, cette même baſe eſt dans le plan horizontal *K I*. La limite inférieure *G H* de la courſe du piſton, doit être le plus près qu'il eſt poſſible de la ſoupape *E*.

On voit que des deux ſoupapes *E* & *F*, qui d'ailleurs s'ouvrent & ſe ferment alternativement de la même manière, la première *E* occupe toujours la même place (on l'appelle, par cette raiſon, ſoupape *dormante*); & la ſeconde *F* eſt *mobile* avec le piſton qui la porte.

La preſſion de l'atmoſphère dans un même endroit eſt ſujette à quelques variations, comme nous le dirons plus expreſſément ci-deſſous; mais dans tout ce petit traité des pompes, nous la regardons comme une force conſtante, en l'évaluant ſur le pied de ſa quantité moyenne. Cette quantité eſt à peu-près équivalente, dans nos climats, au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur,

ou

ou au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur.

Cela posé, pour expliquer le jeu de la pompe aspirante, supposons qu'au premier instant, la base du piston soit en *GH*. Alors l'air compris dans l'espace *MC*, l'air compris dans l'espace *AH*, & l'air naturel ou l'air de l'atmosphère, dans l'endroit où est la machine, ont la même densité, la même force élastique : les deux soupapes *E* & *F* étant supposées permettre, par la liberté qu'elles ont de s'ouvrir & de se fermer, la communication des trois airs dont il s'agit; après quoi ces deux soupapes se ferment par leurs poids. Maintenant, élevez le piston de *GH* en *KI*: la soupape *F* demeure fermée par son poids & par la pression de l'air supérieur; l'air *MG* & l'air *AH* se dilatent; le premier, par sa force d'expansion, fait ouvrir la soupape *E*; ces deux airs se mêlent ensemble, & ne forment plus qu'un même air, dont la force élastique diminuant en même raison que l'espace dans lequel il se répand, augmente (67), ne peut plus faire équilibre à la pression de l'air extérieur sur la surface *MN* du réservoir; par conséquent, cette dernière force doit faire monter l'eau dans le tuyau d'aspiration, d'une certaine quantité *Mx*, tandis que le piston monte de *GH* en *KI*. La hauteur *Mx* est telle que le poids de la colonne d'eau *Mu*, joint à la force élastique de l'air affoibli, répandu dans l'espace *xI*, & au poids de la soupape *E*, est en équilibre avec

la pression de l'air extérieur. Quand le piston est parvenu en *KI*, la soupape *E* retombe par son poids & isole l'air compris dans l'espace *xC*; & la colonne d'eau *Mu* demeure toujours suspendue à la même hauteur *Mx*. Abaissez le piston de *KI* en *GH*: l'air affoibli, compris dans l'espace *AI*, s'appuie par son ressort qui agit en tout sens, contre la soupape *E* qu'il tient fermée, & contre la soupape *F* qu'il force à s'ouvrir; l'air affoibli, compris depuis *AC* jusqu'à la base inférieure du piston, coule par le trou *f*, & se mêle avec l'air extérieur. Cet effet dure jusqu'à ce que le piston soit parvenu en *GH*; ensuite la soupape *F* se ferme. Élevez le piston de *GH* en *KI*: la soupape *F* demeure fermée, la soupape *E* s'ouvre, & l'eau monte encore d'une certaine quantité *xy*, dans le tuyau d'aspiration; ainsi de suite. D'où l'on voit, qu'après un certain nombre de coups de piston, l'eau arrivera dans le corps de pompe, & sortira, ou par l'extrémité supérieure de ce tuyau, ou par un tuyau *O* implanté au corps de pompe. Cet écoulement durera tant que l'on continuera de faire jouer le piston.

On voit que le jet d'eau n'est pas continu, & qu'il a lieu seulement, ou peut être censé avoir lieu pendant que le piston monte.

(73.) *REMARQUE*. Il faut observer, qu'en négligeant même le poids de la soupape *E*, & en supposant qu'on pût faire dans le tuyau d'aspiration le même vide que dans la partie supérieure

ı tube du Baromètre, la hauteur *AM* doit être oindre que la hauteur de la colonne d'eau, qui roit équilibre à la colonne de mercure du Baroètre, dans l'endroit où la pompe joue : & cela, in que l'eau puiſſe arriver en *AC*, & paſſer dans corps de pompe. Ainſi la hauteur de la colonne : mercure étant ſuppoſée de 28 pouces, la hau·ur *AM* doit être moindre que 32 pieds. Mais :tte condition étant une fois remplie, la hauteur *V* de la ſurface *BD* de l'eau dans le corps de ompe, au-deſſus de la ſurface *MN* de l'eau du :ſervoir, peut être plus grande que la hauteur de colonne d'eau équivalente à la preſſion de l'atıoſphère. Sur quoi néanmoins on doit prendre arde que la tige *Z* du piſton, ſe mouvant dans : corps de pompe *ABDC*, la hauteur *AB* de : tuyau ne doit pas être trop grande ; autrement . tige *Z* ſeroit expoſée à ſe fauſſer.

(74.) L'écoulement de l'eau par le tuyau de ›rtie *O*, ou le produit de la pompe, eſt facile à éterminer : car on voit que dans le temps que le iſton monte de *GH* en *KI*, il ſort une quantité 'eau équivalente à un cylindre d'eau *GI*.

(75.) Ce même écoulement ayant toujours lieu, · *piſton ſoutient continuellement en montant un effort ʒal au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour aſe le cercle de la tête du piſton, & pour hauteur elle de la ſurface de l'eau dans le corps de pompe u-deſſus de la ſurface de l'eau du réſervoir ;* c'eſt-àlire, qu'en nommant *F* l'effort ſoutenu par le

piſton, a^2 l'aire du cercle repréſenté par GH, h la hauteur LV de la ſurface BD de l'eau dans le corps de pompe au-deſſus de la ſurface MN du réſervoir : on a $F = a^2 \times h$. Car ſoit VS la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la preſſion de l'atmoſphère ; & ſuppoſons que le piſton, en montant, ſoit parvenu dans la poſition quelconque gh, à laquelle répond la hauteur rV : il eſt clair, 1.° que le piſton eſt pouſſé de haut en bas par la preſſion de l'atmoſphère, qui produit un effort $= a^2 \times VS$, & par la preſſion de la colonne d'eau gD, qui produit un effort $= a^2 \times rL$. De ſorte qu'en tout le piſton eſt pouſſé de haut en bas, avec une force $= a^2 \times VS + a^2 \times rL$. 2.° Le piſton eſt pouſſé de bas en haut par la preſſion de l'atmoſphère ſur la ſurface MN du réſervoir, qui produit un effort $= a^2 \times VS$; cet effort eſt détruit en partie par le poids de la colonne d'eau qui a pour baſe le cercle gh ou GH, & pour hauteur, rV. De ſorte qu'en tout le piſton eſt pouſſé de bas en haut, avec une force $= a^2 \times VS - a^2 \times rV$. Par conſéquent on a $F = (a^2 \times VS + a^2 \times rL) - (a^2 \times VS - a^2 \times rV)$; ce qui ſe réduit à $F = a^2 \times LV = a^2 \times h$.

A cette force, il faut ajouter le poids du piſton dans l'eau, & le frottement que le piſton éprouve le long des parois du corps de pompe, pour avoir la réſiſtance totale que le piſton eſt obligé de ſurmonter en montant.

Le piſton deſcend par ſon poids dans l'eau ; il

n'a pas alors d'autre résistance à vaincre que le frottement, & un petit choc contre l'eau.

Pompe foulante.

(76.) On voit (*Fig. 38*) une pompe foulante. Le corps de pompe *ABDC* trempe dans l'eau d'un réservoir dont la surface est *MN*; le piston entre par en bas, & soulève ou *foule* l'eau; sa tige Z est solidement fixée à un chassis mobile *TYX* qu'on fait monter & descendre alternativement par le moyen d'un levier, ou de toute autre manière; sa tête est percée d'un trou couvert par une soupape *F* qui s'ouvre de bas en haut. En *AC*, un peu au-dessous de la surface *MN* de l'eau du réservoir, est un diaphragme percé d'un trou couvert par une soupape *E* qui s'ouvre de bas en haut. Le corps de pompe s'unit en *AC* avec le tuyau montant *ACV* qui porte l'eau à l'endroit où l'on veut l'élever. Fig. 38.

Pour expliquer le jeu de cette pompe, supposons qu'au premier instant la tête du piston soit placée en *KI*, qui est la limite la plus basse de sa course. Alors le corps de pompe est rempli d'eau; & cette eau est de niveau avec celle du réservoir, les deux soupapes *E* & *F* permettant, par leur mobilité, la communication des eaux; ensuite ces deux soupapes se ferment par les pesanteurs qui leur restent dans le fluide. Élevez le piston de *KI* en *GH*, qui est la limite supérieure de sa course: la soupape inférieure *F* demeure fermée,

la ſoupape E s'ouvre, & l'eau contenue dans l'eſpace KH s'élève au-deſſus de GH, & paſſe dans le tuyau montant ; de plus, pendant que le piſton monte, il eſt ſuivi par l'eau qui entre du réſervoir dans le corps de pompe. Abaiſſez le piſton de GH en KI: la ſoupape F s'ouvre, & la ſoupape E ſe ferme & empêche l'eau qui eſt au-deſſus de deſcendre : élevant une ſeconde fois le piſton, la ſoupape F ſe ferme, la ſoupape E s'ouvre, & l'eau continue de s'élever dans le tuyau montant ACV; ainſi de ſuite. On voit que par le jeu réitéré du piſton, l'eau s'élève de plus en plus dans le tuyau ACV, & finit par arriver à la hauteur deſirée.

L'élévation de l'eau eſt intermittente, comme dans la pompe de la première eſpèce.

(77.) *Remarque*. La hauteur du tuyau montant n'eſt pas limitée ici, comme pour la pompe aſpirante, parce que la tige Z du piſton eſt au-dehors de ce tuyau. On donne à cette tige la longueur ſimplement néceſſaire pour le jeu du piſton, & pour venir gagner la traverſe inférieure du chaſſis TYX.

(78.) Il eſt clair que cette pompe donne une quantité d'eau équivalente au cylindre KH, pendant le temps que le piſton monte de KI en GH.

(79.) En raiſonnant comme pour la pompe foulante, on verra que le piſton, en montant, ſoutient ici de la part de l'eau un effort égal au

poids d'une colonne qui auroit pour base le cercle de la tête du piston, & pour hauteur la verticale comprise depuis la surface de l'eau du réservoir jusqu'à la surface de l'eau dans le tuyau montant. A quoi il faut ajouter le poids du chassis *TYX*, celui du piston dans l'eau, & le frottement contre les parois du corps de pompe.

Le piston descend par la pesanteur; il est retardé par le frottement & par un petit choc contre l'eau.

Pompe aspirante & foulante.

(80.) La pompe aspirante & foulante, représentée par la *Figure 39*, est composée d'un tuyau d'aspiration *AMNC* qui trempe dans l'eau *MN* d'un réservoir; d'un corps de pompe *ABDC*, dans lequel le piston *P* se meut comme dans les deux pompes précédentes; & d'un tuyau montant *CQV*. En *AC* & *QR* sont deux soupapes, ou deux clapets à charnières, qui s'ouvrent de bas en haut. Le piston joue dans l'étendue *GK*; sa tête est massive, & n'est pas percée comme dans les deux cas précédens. On voit qu'en le faisant monter & descendre alternativement, l'eau s'élève d'abord dans le tuyau d'aspiration & dans le corps de pompe, comme dans la pompe aspirante ordinaire, avec cette différence que maintenant l'air s'échappe par le tuyau montant, & non par la tête du piston. Les mouvemens alternatifs des deux soupapes *E* & *F* sont absolument les mêmes dans les deux cas. L'eau arrive, après quelques Fig. 39.

coups de piſton, dans l'eſpace vide que ce même piſton en s'élevant occaſionne dans le corps de pompe. Enſuite le piſton en deſcendant la foule & la fait paſſer dans le tuyau montant *CQV*. Élevant le piſton, il aſpire de nouvelle eau qu'il foule en deſcendant ; ainſi de ſuite.

Il eſt clair que la remarque de l'article 73 doit s'appliquer ici.

(81.) Le produit de la pompe, ou la quantité d'eau qu'elle jette par l'extrémité ſupérieure du tuyau montant, s'eſtime toujours par le cylindre d'eau *KH*, qui ſortiroit pendant le temps que le piſton emploie à s'abaiſſer de *KI* en *GH*.

(82.) Pour trouver la valeur de la force motrice, ſuppoſons que la tête du piſton ſoit dans la poſition *gh*, à laquelle répond la hauteur verticale *gM* au-deſſus de l'eau du réſervoir. Soient *MS* la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la preſſion de l'atmoſphère, & *ML* la hauteur entière à laquelle l'eau eſt élevée. Nommons a^2 l'aire du cercle *gh*; *h* la hauteur *gM*; *H* la hauteur *gL*; *P* le poids du piſton & de ſon équipage; *X* la force qui pouſſe le piſton de bas en haut ; ou pendant l'aſpiration, en faiſant abſtraction du frottement; *Y* la force qui pouſſe le piſton de haut en bas, ou pendant le refoulement, toujours abſtraction faite du frottement. Cela poſé, 1.° le piſton parvenu en *gh* étant ſuppoſé monter, ou aſpirer l'eau, & par conſéquent, la ſoupape *F* étant fermée, il eſt clair que $X = P + a^2 \times SM$

$-(a^2 \times SM - a^2 \times gM) = P + a^2 \times gM = P + a^2 h.$

2.° Le piſton parvenu en gh étant ſuppoſé deſcendre, ou fouler l'eau, & par conſéquent la ſoupape E étant fermée, on a $Y = a^2 \times SM + a^2 \times gL - a^2 \times SM - P = a^2 H - P.$

La ſomme des deux forces X & Y eſt $a^2 h + a^2 H$, ou $a^2 \times ML$. Ainſi l'effort total que l'agent eſt obligé de déployer pour mouvoir la machiue, eſt égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour baſe la tête du piſton, & pour hauteur celle du point où l'eau eſt élevée au-deſſus du réſervoir. Mais nous avons ici l'avantage, que cet effort ſe partage en deux parties, l'une qui répond à l'aſpiration, l'autre au refoulement; au lieu que dans les deux premières eſpèces de pompes, l'effort total s'exerce pendant que le piſton s'élève & foule l'eau.

(83.) Nous ferons à ce ſujet une remarque importante. Comme dans toute machine il eſt eſſentiel d'établir, autant qu'il eſt poſſible, l'uniformité de mouvement, on doit s'attacher à rendre les deux forces X & Y égales entr'elles. Cette égalité donnera $P + a^2 h = a^2 H - P$; d'où l'on tire $P = \frac{a^2 (H - h)}{2}$, Ainſi, 1.° des deux parties gL, gM de la hauteur totale ML, la première doit être plus grande que la ſeconde; car ſi on avoit $H = h$, ou $H < h$, le poids P ſeroit nul ou négatif; or, ni l'un ni l'autre ne peut avoir lieu. 2.° Si tout reſtant d'ailleurs le même, la ſurface

MN de l'eau du réservoir vient à s'abaisser ou à s'élever (ce qui arrive quand le tuyau d'aspiration trempe dans une rivière), il faut diminuer ou augmenter P en conséquence; ce qu'on peut toujours obtenir, du moins jusqu'à un certain point, en déchargeant ou en chargeant la tête du piston de certains poids amovibles.

Le défaut d'équilibre entre les forces X & Y est très-commun. On y est tombé dans les prétendues corrections que l'on fit, il y a quelques années, à l'un des équipages des pompes de la Samaritaine. Il ne paroît pas qu'on ait connu la véritable cause des inconvéniens qui ont résulté de ces changemens.

(84.) La pompe aspirante & foulante peut avoir une autre forme ou une autre disposition que celle de la *Figure 39*. Dans cette Figure, le piston aspire en montant & foule en descendant. Mais on peut faire en sorte (*Fig. 40*) que le piston aspire en descendant & foule en montant.

Fig. 40.

En nommant a^2 l'aire du cercle gh; h la hauteur rM du piston parvenu en gh, au-dessus de l'eau du réservoir; H la hauteur rL depuis gh jusqu'au point où l'eau est élevée; P le poids du piston & de son équipage; X la force qui pousse le piston de haut en bas, ou pendant l'aspiration; Y la force qui pousse le piston de bas en haut, ou pendant le refoulement, on trouvera (abstraction faite du frottement), $X = a^2 h - P$, $Y = a^2 H + P$. Donc, si l'on fait $X = Y$, on aura $a^2 h - P = a^2 H + P$; ce qui donne $P = \frac{a^2 (h - H)}{2}$. Ainsi, dans

le cas préfent, il faut que des deux parties Mr, rL de la hauteur totale ML, la feconde foit moindre que la première.

La hauteur ML à laquelle on veut élever l'eau étant donnée, on déterminera, d'après le rapport des diftances verticales de gh à la furface de l'eau du réfervoir, & à la furface de l'eau de la décharge, quelle eft celle des deux pompes (*Fig. 39 & 40*), qu'il convient d'employer.

Dans la pratique, on fuppofera que la pofition moyenne gh du pifton répond au milieu de GI.

Nous n'avons pas befoin d'ajouter que dans nos calculs de forces, nous confidérons le fimple état d'équilibre.

(85.) SCHOLIE I. Dans les trois efpèces de pompes propofées, le jet d'eau formé au dégorgeoir n'eft pas toujours égal, & il éprouve de l'intermittence ; car il y a environ la moitié du temps qui eft employée à abaiffer ou à élever le pifton pour prendre de nouvelle eau ; & pendant cette partie du temps, il ne fort point d'eau, ou du moins il n'en fort que très-peu par le dégorgeoir. On peut éviter cette intermittence, ou rendre le jet continu, en garniffant le tuyau montant, comme on le voit dans la pompe foulante de la *Figure 41*, d'une efpèce de tambour creux Gx, fermé au-dehors de tous côtés, mais qui communique avec le tuyau interrompu en G, H. Ce tambour, qu'on appelle *réfervoir d'air*, contient Fig. 41.

d'abord de l'air qui a même denſité que celui du dehors. Quand on élève le piſton, l'eau qui monte par la branche *CBDQ*, ſe répand en partie dans le réſervoir *Gx*; elle condenſe l'air qui y eſt contenu ; elle lui coupe la communication avec l'air extérieur, & le réduit à n'occuper que l'eſpace *kryx*. Lorſqu'enſuite on abaiſſe le piſton, l'air ainſi condenſé ſe dilate par ſon reſſort, force l'eau à deſcendre de *kr* en *KR*, & à s'élever par conſéquent dans la branche *GHQD*. En continuant le même jeu, on voit qu'il monte ſans ceſſe de l'eau dans cette branche, & que le jet à l'endroit du dégorgeoir doit être continu, du moins ſenſiblement.

Il y a des faiſeurs de pompes qui s'imaginent que le réſervoir d'air augmente de moitié l'effet de la machine ; car, diſent-ils, puiſqu'alors le jet eſt continu, la pompe doit donner deux fois autant d'eau qu'elle en donneroit s'il n'y avoit pas de réſervoir d'air, & que le jet fût intermittent. Mais ils ne font pas attention que le produit de la pompe n'eſt jamais que la quantité d'eau que le piſton ſoulève en montant ; & que la puiſſance motrice (la vîteſſe du piſton demeurant toujours la même) emploie toujours le même effort, ſoit qu'elle faſſe monter directement cette eau juſqu'au dégorgeoir, ſoit qu'une partie de cette eau ſe répande dans le réſervoir d'air, d'où elle eſt ſoulevée enſuite par le reſſort de l'air. Car dans le ſecond cas, il faut tendre le reſſort de l'air du réſervoir

Gx; & cet effort, joint à celui qui fait monter actuellement une partie de l'eau dans la branche *GHQD,* épuise la force entière; ce qui revient au premier cas. Si donc le jet est continu quand il y a un réservoir d'air, l'eau sort avec une vîtesse deux fois moindre qu'elle ne sortiroit s'il n'y avoit pas de pareil réservoir, & que le jet fût intermittent ; & le produit de la pompe est toujours le même. Le réservoir d'air a donc simplement l'avantage de procurer plus d'uniformité au mouvement de la machine; & de rendre le jet d'eau continu, ce qui est très-utile dans les pompes à incendie, parce qu'un jet d'eau continu éteint plus facilement le feu, qu'un jet qui va par bonds, quoiqu'avec plus de vîtesse.

(86.) SCHOLIE II. On emploie, pour mouvoir les pompes, toutes sortes d'agens, comme des hommes, des chevaux, des courans d'eau, l'action du vent, &c. Les petites machines de ce genre, telles que les pompes à puits ou à incendies, sont ordinairement mues à bras d'hommes. Lorsqu'il faut élever une quantité considérable d'eau, on multiplie à proportion la force motrice; & pour qu'elle exerce continuellement le même effort, du moins à peu-près, sans rester jamais oisive, on établit plusieurs équipages de pompes; de manière que lorsqu'une partie des pistons descend, l'autre monte.

Tout le jeu de ces machines dépend de la régularité du mouvement alternatif des *soupapes* ou des

clapets. Il faut donc que ces pièces ſoient tellement conſtruites & diſpoſées, qu'elles tiennent bien l'eau quand elles ſont fermées ; & qu'elles s'ouvrent facilement quand elles doivent le faire. Les détails de pratique ſur ce ſujet n'entrent pas dans mon plan.

Les tuyaux des pompes ſouffrent quelquefois des efforts très-conſidérables. Lorſque ces tuyaux ſeront faits avec des matières flexibles, comme, par exemple, avec du plomb, du cuivre, du fer même, & qu'on aura évalué en colonnes d'eau de hauteurs données, les preſſions qu'ils ſupportent, on trouvera les épaiſſeurs qu'ils doivent avoir pour ne pas crever, au moyen de la théorie du chapitre IV.



CHAPITRE VIII.

Continuation du même ſujet : hauteurs auxquelles l'eau s'élève ſucceſſivement dans les pompes ; arrêts qu'elle peut éprouver.

(87.) SOIT d'abord la pompe aſpirante de la *Figure 37*, où la ſoupape dormante *E* eſt placée à la jonction du corps de pompe avec le tuyau d'aſpiration *AN*, dont la hauteur *AM* doit être moindre que 32 pieds (73). Je ſuppoſe qu'afin de pouvoir vider l'air, autant qu'il eſt poſſible, du tuyau d'aſpiration, la limite inférieure *GH* de la courſe du piſton, touche, du moins à peu de choſe près, la ſoupape *E* ; ce qu'on peut établir avec d'autant plus de liberté, que la ſoupape *E* ne doit s'ouvrir que lorſque le piſton monte. Examinons comment, à chaque coup de piſton, l'eau s'élève ſucceſſivement dans le tuyau d'aſpiration : par-là, nous parviendrons à connoître les *arrêts* ou les interruptions que ce mouvement aſcenſionnel peut éprouver. Fig. 37.

(88.) Il réſulte de l'article 72, qu'à chaque fois que le piſton, en montant, arrive en *KI*, la preſſion de l'atmoſphère ou de l'air naturel fait équilibre à la force élaſtique ou à la preſſion de l'air affoibli, compris depuis *KI* juſqu'à la ſurface de la colonne d'eau élevée dans le tuyau

d'aſpiration, & au poids de cette même colonne. Or, pour établir clairement les conditions de l'équilibre entre ces trois forces, nous les réduirons à la même eſpèce; & nous évaluerons en conſéquence les deux premières par des preſſions de colonnes d'eau, de hauteurs convenables : hauteurs que j'appellerai, pour abréger, *hauteurs dûes* aux forces dont il s'agit. La hauteur dûe à la preſſion de l'atmoſphère eſt conſtante, ou peut être ſuppoſée telle; mais la hauteur dûe à la preſſion de l'air ſucceſſivement raréfié eſt variable, & dépend du degré d'affoibliſſement de cet air.

Maintenant, il eſt clair qu'il y aura équilibre entre les trois forces propoſées, ſi la hauteur dûe à la preſſion de l'atmoſphère, eſt égale à la ſomme de la hauteur dûe à la preſſion de l'air intérieur affoibli, & de la hauteur de la colonne d'eau élevée dans le tuyau d'aſpiration au-deſſus du niveau *MN* du réſervoir. Il eſt indifférent d'ailleurs que les preſſions s'exercent ſur des baſes égales ou inégales, comme il eſt indifférent, dans un ſiphon, que les deux branches ſoient égales ou inégales (21).

(89.) Suppoſons qu'en vertu du premier coup ou de la première aſcenſion du piſton, de *GH* en *KI*, l'eau s'élève en *xu* dans le tuyau d'aſpiration; & imaginons que le piſton demeure un inſtant en *KI*. Alors la preſſion de l'atmoſphère ou de l'air naturel contre-balance la preſſion de la colonne d'eau *Mu*, & la force élaſtique de l'air dilaté dans l'eſpace *Ku*. Nommons

La hauteur

La hauteur AM du tuyau d'aſpiration.... a,
Le jeu GK ou AK du piſton.......... b,
Le rayon du corps de pompe AD....... R,
Le rayon du tuyau AN d'aſpiration...... r,
Le rapport de la circonférence au diamètre.. π,
La hauteur dûe à la preſſion de l'air naturel.. h,
La hauteur xM de la colonne Mu...... x,
La hauteur dûe à la preſſion ou à la force élaſtique de l'air dilaté dans l'eſpace Ku.. y.

On aura d'abord l'équation (A), $h = x + y$.

La hauteur dûe à la force élaſtique de l'air naturel qui occupoit l'eſpace AN avant l'aſcenſion du piſton, étant repréſentée par h, & cet air s'étant répandu, pendant l'aſpiration, dans l'eſpace Ku, la hauteur y dûe à la force élaſtique qu'il a dans ce ſecond état, ſera repréſentée (67) par $h \times \frac{AN}{Ku}$; c'eſt-à-dire qu'on aura $y = h \times \frac{AN}{Ku}$. Or, l'eſpace ou le cylindre $AN = \pi r^2 a$; l'eſpace Ku ou la ſomme des cylindres KC, Au, eſt $= \pi R^2 b + \pi r^2 (a - x)$. Ainſi nous aurons cette ſeconde équation (B), $y = \frac{h r^2 a}{R^2 b + r^2 (a - x)}$.

Comparant enſemble les deux équations (A) & (B), & faiſant, pour abréger, $\frac{R^2}{r^2} = k$, $h + a + kb = p$, on trouvera, $x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}$, $y = \frac{2h - p \mp \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}$.

Des deux valeurs de x & de y, indiquées par le double ſigne, il ne faut prendre que les valeurs indiquées par les ſignes inférieurs; car chacune

des valeurs de x ou de y, doit être moindre que h. Or, si l'on employoit le signe supérieur pour x, on auroit $\frac{p + \sqrt{(pp - 4khb)}}{2} > h$, ou $+ \sqrt{[(h + a + kb)^2 - 4khb]} > h - a - kb$, puisqu'en carrant chaque membre & réduisant, il vient $4ah >$ .. Si au contraire on emploie le signe inférieur pour x, on trouvera que la valeur de x est moindre que h; & que la valeur correspondante pour y, c'est-à-dire, la quantité $\frac{h - a - kb + \sqrt{[(h + a + kb)^2 - 4khb]}}{2}$, est aussi moindre que h, puisque $\frac{\sqrt{[(h + a + kb)^2 - 4khb]}}{2} < h + a + kb$, le terme $- 4khb$ étant toujours négatif. Par conséquent les deux valeurs de x & de y, qui satisfont au problème, sont :

$$\text{I.} \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{p - \sqrt{(pp - 4khb)}}{2}, \\ y &= \frac{2h - p + \sqrt{(pp - 4khb)}}{2}. \end{aligned} \right.$$

Connoissant ainsi les valeurs de x & de y, qui répondent au premier coup de piston, on trouvera semblablement les valeurs analogues qui doivent répondre successivement au second, au troisième, au quatrième, &c. coup de piston. En effet, soit My la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aspiration, correspondante au second coup de piston, c'est-à-dire, après que le piston redescendu d'abord de KI en GH, est remonté ensuite de GH en KI. Nommons x' cette hauteur, & y' la hauteur dûe

à la force élaſtique du ſecond air affoibli. Nous aurons d'abord l'équation (C), $h = x' + y'$. Mais d'un autre côté, le premier air affoibli qui, au premier inſtant de la ſeconde aſpiration, occupoit l'eſpace Au, & qui avoit alors une force élaſtique proportionnelle à la hauteur y, étant maintenant répandu dans l'eſpace Kz, aura une force élaſtique proportionnelle à la hauteur $y \times \frac{Au}{Kz}$, ou $\frac{yr^2(a-x)}{R^2b+r^2(a-x')}$. On aura donc $y' = \frac{yr^2(a-x)}{R^2b+r^2(a-x')}$, ou (D), $y' = \frac{y(a-x)}{a-x'+kb}$.

Comparant enſemble les deux équations (C) & (D), & mettant pour y ſa valeur $h - x$, on trouvera :

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{p-\sqrt{[pp-4khb-4x(h+a-x)]}}{2}, \\ y' = \frac{2h-p+\sqrt{[pp-4khb-4x(h+a-x)]}}{2}. \end{array}\right.$$

J'ai pris les ſignes inférieurs pour les valeurs de x' & de y', par la même raiſon que pour les valeurs de x & de y. Il en ſera de même pour les ſuivantes.

Semblablement, ſi l'on nomme x'' la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aſpiration, après le troiſième coup de piſton; y'' la hauteur dûe à la force élaſtique du troiſième air affoibli : on trouvera, en obſervant que x'' & y'' dérivent de x' & de y', ſuivant la même loi que x' & y' dérivent de x & de y, on trouvera, dis-je :

$$\text{III.}\begin{cases} x'' = \dfrac{p - \sqrt{[pp - 4khb - 4x'(h+a-x')]}}{2}, \\ y'' = \dfrac{2h - p + \sqrt{[pp - 4khb - 4x'(h+a-x')]}}{2}. \end{cases}$$

Ainſi de ſuite.

D'où l'on voit que ſi en général on déſigne par $x^{(n)}$ la valeur de x, après le nombre $n + 1$ de coups de piſton ; par $y^{(n)}$ la valeur correſpondante de y ; par $x^{(n-1)}$ la valeur de x après le nombre n de coups de piſton ; par $y^{(n-1)}$ la valeur correſpondante de y : on aura,

$$x^{(n)} = \frac{p - \sqrt{[pp - 4khb - 4x^{(n-1)}(h+a-x^{(n-1)})]}}{2},$$

$$y^{(n)} = \frac{2h - p + \sqrt{[pp - 4khb - 4x^{(n-1)}(h+a-x^{(n-1)})]}}{2}.$$

(90.) Il eſt évident qu'au moyen des équations précédentes, on connoîtra, après un nombre quelconque de coups de piſton, la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aſpiration, & la force élaſtique de l'air enfermé dans la machine. On connoîtra auſſi les hauteurs produites par chaque coup de piſton en particulier, & les différences des forces élaſtiques ſucceſſives de l'air enfermé, puiſqu'ayant trouvé x, x', x'', &c. y, y', y'', &c. on a les valeurs des quantités x, $x' - x$, $x'' - x'$, &c. y, $y' - y$, $y'' - y'$, &c.

(91.) En regardant le poids de la ſoupape E comme nul, on formera, après un certain nombre de coups de piſton, un vide d'air dans la pompe, & l'eau finira toujours par s'élever en E, pourvu

que la hauteur AM ſoit tout au plus égale à h. Cette propoſition, qui eſt une ſuite du principe poſé, que la hauteur dûe à la preſſion de l'atmoſphère eſt h, réſulte de nos formules. Car, ſi après un certain nombre $n + 1$ de coups de piſton, l'eau s'arrêtoit dans le tuyau d'aſpiration, on auroit $x^{(n)} = x^{(n-1)}$, & par conſéquent

$$x^{(n-1)} = \frac{p - \sqrt{[pp - 4hhb - 4x^{(n-1)}(h + a - x^{(n-1)})]}}{2};$$

d'où l'on tire $x^{(n-1)} = h$, & d'où l'on doit conclure que ſi a ou $AM < h$, l'eau ne s'arrêtera pas dans le tuyau d'aſpiration, & qu'elle paſſera dans le corps de pompe.

(92.) Lorſqu'il faudra avoir égard au poids de la ſoupape E, vous le regarderez comme celui d'une colonne d'eau qui a pour baſe l'ouverture de la ſoupape, & une hauteur donnée en conſéquence; vous retrancherez cette hauteur de h, & vous ſubſtituerez le reſte h' à la place de h dans les calculs précédens. Alors, tous les réſultats qui ont lieu par rapport à h ſeront auſſi vrais pour h', qu'on peut regarder comme la hauteur dûe à la force extérieure qui tend maintenant à faire monter l'eau dans le tuyau d'aſpiration, puiſque l'effort de la ſoupape E eſt contraire à celui de la preſſion totale de l'atmoſphère & doit en être ſouſtrait.

(93.) La poſition de la ſoupape E, à la jonction du tuyau d'aſpiration avec le corps de pompe, eſt la plus avantageuſe de toutes pour évacuer l'air

intérieur, & pour donner ainsi à la pompe toute la perfection dont elle est susceptible. Le seul inconvénient de cette position, est que les cuirs dont la soupape est ordinairement garnie, venant à se dessécher lorsque la pompe reste quelque temps dans l'inaction, il peut se faire que la soupape *E* ne se ferme pas bien exactement, ce qui obligeroit à tenir le tuyau d'aspiration plus court que ne le demandent les calculs précédens. On voit que la même remarque a lieu pour la soupape mobile *F*.

(94.) Considérons maintenant une autre espèce de pompe aspirante, où la soupape dormante, au lieu d'être placée au haut du tuyau d'aspiration, comme ci-dessus, est ici placée au bas de ce tuyau. Je suppose donc que tout restant d'ailleurs le
Fig. 37. même *(Fig. 37)*, la soupape *E* soit en *MN*, entièrement noyée dans l'eau du réservoir. En faisant monter & descendre alternativement le piston, l'eau entrera dans le tuyau d'aspiration, & s'y élèvera, mais non suivant la même loi que dans le cas précédent. Elle pourra s'arrêter, en supposant même que la hauteur *AM* du tuyau d'aspiration soit beaucoup moindre que 32 pieds. Car soit, par exemple, *Mr* la hauteur à laquelle l'eau est arrivée après un certain nombre de coups de piston : comme, le piston étant descendu en *GH*, l'air compris dans l'espace *rH* est devenu de l'air naturel, il peut se faire que la force élastique de cet air dilaté lorsque le piston arrive en *KI*, jointe à la pression de la colonne d'eau élevée

dans le tuyau d'aſpiration, forme une ſomme ou une force égale à la preſſion de l'atmoſphère; d'où il ſuit que l'eau ne pourra pas monter davantage. Cherchons par le calcul la manière dont l'eau s'élève; ce qui nous fera connoître les cas où les *arrêts* ont lieu.

(95.) Soient Mx, My, &c. les hauteurs ſucceſſives auxquelles l'eau arrive dans le tuyau d'aſpiration. En gardant toutes les dénominations de l'article 89, il eſt évident d'abord qu'on aura ici comme là, après le premier coup de piſton, les deux équations, $x + y = h$, $y = \frac{ha}{kb + a - x}$; d'où l'on tire, $x = \frac{p - \sqrt{(pp - 4khb)}}{2}$, $y = \frac{2h - p + \sqrt{(pp - 4khb)}}{2}$. Mais les équations analogues ſuivantes ne ſont pas les mêmes.

Pour les trouver, on obſervera qu'au commencement de la ſeconde aſpiration, l'air compris dans l'eſpace Au eſt de l'air naturel; d'où il ſuit que cet air, après la ſeconde aſpiration, étant répandu dans l'eſpace Kz, la hauteur dûe à ſa force élaſtique ſera $h \times \frac{Ax}{Kz}$, ou $\frac{h(a - x)}{kb + a - x'}$. On aura donc, $y' = \frac{h(a - x)}{kb + a - x'}$; & comme on a toujours $x' + y' = h$, on trouvera:

$$x' = \frac{p - \sqrt{[(pp - 4kbh - 4hx)}}{2},$$

$$y' = \frac{2h - p + \surd[(pp - 4khb - 4hx)}{2}.$$

De même, en obſervant que x'' & y'' dérivent de x' & de y', comme x' & y' dérivent de x & y, on trouvera :

$$x'' = \frac{p - \surd(pp - 4khb - 4hx')}{2},$$

$$y'' = \frac{2h - p + \surd(pp - 4khb - 4hx')}{2}.$$

Et en général,

$$x^{(n)} = \frac{p - \surd(pp - 4khb - 4hx^{(n-1)})}{2},$$

$$y^{(n)} = \frac{2h - p + \surd(pp - 4khb - 4hx^{(n-1)})}{2}.$$

(96.) Maintenant, ſuppoſons que l'eau s'arrête après le nombre $n + 1^e$ de coups de piſton ; on aura alors $x^{(n)} = x^{(n-1)}$, & par conſéquent

$$x^{(n-1)} = \frac{p - \surd(pp - 4khb - 4hx^{(n-1)})}{2};$$

d'où l'on tire

$$x^{(n-1)} = \frac{a + kb \pm \surd[(a + kb)^2 - 4khb]}{2};$$

& d'où l'on voit qu'à cauſe du double ſigne, l'eau s'arrêtera en deux endroits, lorſque la quantité radicale ſera réelle : condition qui exige que l'on ait, ou $(a + kb)^2 = 4khb$, ou $(a + kb)^2 > 4khb$. Dans la première hypothèſe, les deux valeurs de $x^{(n-1)}$ ſont égales, & l'eau ne s'arrête qu'en un ſeul endroit, auquel répond la valeur $x^{(n-1)} = \frac{a + kb}{2}$: dans la ſeconde, l'eau s'arrête en

deux endroits auxquels répondent les deux valeurs de $x^{(n-1)}$. Si la quantité radicale eſt imaginaire, il n'y a point d'arrêt à craindre. Éclairciſſons cette théorie par un ou deux exemples.

EXEMPLE I. Soient $h = 32$ pieds; $a = 20$ pieds; $b = 4$ pieds; $k = 1$, ou le rayon du tuyau d'aſpiration, égal à celui du corps de pompe, de manière que ces tuyaux n'en forment qu'un ſeul. On trouvera pour $x^{(n-1)}$, ces deux valeurs, $x^{(n-1)} = 8$ pieds; $x^{(n-1)} = 16$ pieds. Ainſi il y a d'abord un arrêt, quand l'eau dans le tuyau d'aſpiration eſt arrivée à 8 pieds de hauteur au-deſſus de *MN*. Si alors on verſe par en haut de l'eau dans la pompe, en ſoulevant, par exemple, avec un crochet la ſoupape *F*, cet arrêt ſubſiſtera tant que la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aſpiration ſera moindre que 16 pieds, ou ne ſurpaſſera pas 16 pieds; mais paſſé ce point, il n'y a plus d'arrêt. Tout cela eſt aiſé à voir immédiatement: car dans l'intervalle de 8 pieds à 16 pieds, la hauteur de la colonne d'eau aſpirée & la hauteur dûe à la force élaſtique de l'air intérieur, forment une ſomme $>$ 32 pieds; mais la ſomme analogue eſt $<$ 32 pieds, dans l'intervalle de 16 pieds à 20 pieds d'où commence la courſe du piſton.

EXEMPLE II. Soient $h = 32$ pieds; $a = 25$ pieds; $b = 2$ pieds; $k = 4$. On trouvera ces deux valeurs, $x^{(n-1)} = \frac{33 \pm \sqrt{65}}{2}$. L'eau s'arrêtera donc en deux endroits. Mais ſi tout

reſtant d'ailleurs le même, on faiſoit $k = 6$, il n'y auroit point d'arrêt ; il n'y en auroit point non plus, ſi continuant de laiſſer $k = 4$, on faiſoit $b = 4$ pieds, &c.

(97.) On voit, par ces calculs, les inconvéniens de placer la ſoupape dormante en *MN*. Il eſt vrai qu'alors, étant toujours noyée dans l'eau, elle eſt moins expoſée à dépérir qu'elle ne feroit dans l'air. De plus, ſa peſanteur diminuée par l'eau, oppoſe peu de réſiſtance à la preſſion de l'atmoſphère ; mais par-là même elle peut balotter dans l'eau, & ne pas joindre bien exactement les parois du trou qu'elle doit boucher. Il vaut donc beaucoup mieux établir la ſoupape dormante *E* en *AC* qu'en *MN*.

Quelquefois la ſoupape dormante *E* étant placée en *AC*, on en met auſſi une autre en *MN*: alors celle-ci fait ſimplement, par rapport à la précédente, la fonction de *ſoupape de ſûreté*. Ces deux ſoupapes jouent en même temps, & ont les mêmes mouvemens alternatifs.

(98.) Dans la pratique, on laiſſe toujours un certain intervalle, plus ou moins grand, entre la limite inférieure *GH* de la courſe du piſton, & la ſoupape dormante *E* ſuppoſée placée en *AC*. Ce cas eſt intermédiaire à celui de l'article 87, où l'on a regardé *GH* comme touchant, du moins à très-peu près, la ſoupape *E*, & à celui de l'article 94, où la ſoupape dormante eſt placée

en *MN*. Il participe donc des avantages & des inconvéniens attachés aux deux autres. Les calculs néceſſaires pour déterminer les mouvemens & les arrêts de l'eau, dans cette nouvelle hypothèſe, ſont ſi faciles à établir & à exécuter, à l'imitation des précédens, que je croirois tomber dans une longueur ſuperflue, ſi je m'y arrêtois.

(99.) La pompe foulante (*Fig. 38*) n'eſt ſujette à aucun arrêt, lorſque la ſoupape dormante *E* trempe dans l'eau du réſervoir. Mais ſi cette ſoupape étoit placée au-deſſus de la ſurface *MN* du réſervoir, par exemple en *rs*, à une hauteur *st*, telle que l'eſpace intérieur *ACsr* fût plus grand que le volume d'eau que le piſton ſoulève en montant depuis *KI* juſqu'en *GH*: alors il pourroit ſe faire que l'eau ne pût arriver en *rs*, & qu'elle s'arrêtât quelque part au-deſſous de cette ligne. Car ſuppoſons que par la première élévation du piſton, l'eau arrive en *uz*: en ce moment l'air compris depuis la ſurface de cette eau juſqu'en *rs*, eſt de l'air naturel qui ſe dilate & s'affoiblit quand le piſton deſcend; ainſi de ſuite alternativement, pendant tout le temps que le piſton joue. Lorſque le piſton deſcend, la colonne d'eau *Az* eſt pouſſée de haut en bas par ſon propre poids, & par la force élaſtique de l'air contenu dans l'eſpace *us*: de telle ſorte que la réſultante ou la ſomme de ces deux forces, fait équilibre à la preſſion de l'atmoſphère ſur la ſurface *MN* du réſervoir. Or, puiſque la colonne Fig. 38.

d'eau $A z$ monte avec le piſton & deſcend avec lui; s'il arrive (ce qui eſt évidemment poſſible), que d'un coup de piſton au ſuivant la deſcente de la colonne d'eau $A z$ ſoit égale à ſa montée, elle ne pourra jamais atteindre *rs*. Il y aura donc alors ce qu'on appelle *arrêt*, dans la machine. Le calcul des élévations ſucceſſives de l'eau & de ſes arrêts, ſe fait exactement de la même manière que pour la pompe aſpirante.

(100.) Dans la pompe aſpirante & foulante, il peut ſe trouver également des arrêts qu'on déterminera toujours par les mêmes moyens, ſoit que
Fig. 39 & 40. l'aſpiration ſe faſſe quand le piſton monte *(Fig. 39)*, ou qu'elle ait lieu quand le piſton deſcend *(Fig. 40)*. On doit ſe ſouvenir dans tous les cas que la force élaſtique de l'air diminue en même raiſon que ſon volume augmente.

(101.) Je finis par l'examen ſuccinct de l'aſcenſion de l'eau dans les pompes, quand elle y eſt pouſſée par l'action d'une *manivelle triple*, combinée avec la preſſion de l'atmoſphère. On appliquera facilement la même théorie aux autres eſpèces de manivelles.

Fig. 42. Soit $AMNC$ *(Fig. 42)*, un tuyau vertical, plongé dans l'eau MN d'un réſervoir, & portant trois corps de pompe égaux, dans leſquels jouent trois piſtons par le moyen de trois leviers RV, TY, SX. Ces leviers reçoivent eux-mêmes le mouvement de trois chaînes ou de trois autres

leviers RB, TK, SH, dont les extrémités B, K, H, formant les sommets d'un triangle équilatéral BKH, ou ce qu'on nomme la *manivelle triple*, tournent circulairement autour du centre O de ce triangle. La roue $BKDH$ est mue par un agent quelconque, tel, par exemple, qu'un courant d'eau qui la fait tourner dans le sens $BKDH$. La disposition & le mouvement des soupapes sont les mêmes pour chaque corps de pompe, que dans la pompe aspirante ordinaire. Nous plaçons les soupapes *dormantes* E, E', E'' immédiatement à la jonction de chaque corps de pompe avec le tuyau d'aspiration $AMNC$.

La position des points d'appui des trois leviers RV, TY, SX, est indifférente, quant aux principes d'où dépend la solution du problème ; mais pour simplifier le discours & les expressions du calcul, nous supposons que ces appuis sont dans les milieux des leviers : de sorte que la levée de chaque piston est égale au diamètre du cercle que décrit la manivelle.

(102.) Quelle que puisse être la situation initiale de la manivelle, il est clair qu'alors l'air compris dans le tuyau d'aspiration & dans le corps de pompe, est de l'air naturel. Quand ensuite on fait tourner la manivelle, l'air compris dans le tuyau d'aspiration, & dans le corps de pompe dont le piston monte, se raréfie ou se dilate, seulement parce que ce piston monte : un piston

qui s'abaiſſe, donne l'entrée à l'air extérieur dans l'eſpace compris entre ſa ſoupape mobile & ſa ſoupape dormante. En effet, lorſqu'un piſton quelconque monte, ſa ſoupape mobile eſt fermée & ſa ſoupape dormante eſt ouverte : le contraire arrive pour un piſton qui deſcend.

(103.) Suppoſons d'abord qu'au premier inſtant le coude *B* de la manivelle ſoit placé à l'extrémité ſupérieure du diamètre vertical *B D* de la roue, & que par conſéquent la ligne horizontale *KH*, qui joint les deux autres coudes de la manivelle, diviſe le rayon *O D* en deux parties égales. En cet inſtant, la ſoupape mobile *F* touche ou peut être cenſée toucher la ſoupape dormante *E*; & les ſoupapes mobiles *F'*, *F''* ſont chacune diſtantes de leurs ſoupapes dormantes *E'*, *E''*, d'une quantité $= BG$. Soient les points *Q*, *M* les milieux des arcs *BK*, *BH*, & ſoit menée la droite *QM*: la circonférence de la roue ſe trouve ainſi partagée en ſix parties égales *BQ*, *QK*, *KD*, *DH*, *HM*, *MB*; & on a $BL = DG$. Comme les coudes *B*, *K*, *H* de la manivelle, en s'abaiſſant ou en s'élevant, font au contraire monter ou deſcendre les piſtons, on voit que lorſqu'après un ſixième de révolution, *B* eſt arrivé en *Q*, *K* en *D*, *H* en *M*; le piſton correſpondant à *B* ſera élevé d'une quantité égale à *B L*; le piſton correſpondant à *K*, déjà élevé de la quantité *BG*, s'eſt élevé encore de la quantité *GD*; enfin le piſton correſpondant à *H*, d'abord élevé de la

quantité BG, s'abaiſſe de la quantité GL. On voit auſſi que l'air intérieur venant à ſe dilater, l'eau s'élève à une certaine hauteur Mr dans le tuyau d'aſpiration. Or, puiſque la dilatation de l'air intérieur ne s'opère que par l'aſcenſion des piſtons, il s'enſuit que ſi l'on nomme Π le rapport de la circonférence au diamètre ; m le rayon du tuyau d'aſpiration ; n le rayon de chacun des trois corps de pompe ; il s'enſuit, dis-je, que la portion d'air intérieur qui au premier inſtant occupoit un eſpace repréſenté par $\Pi m^2 \times AM + \Pi n^2 \times BG$, & la ſeule qui ſe dilate, occupe à la fin du ſixième de révolution un eſpace $= \Pi m^2 \times Ar + \Pi n^2 \times (BD + BL)$. Dans ce ſecond état, la force élaſtique de l'air ainſi dilaté, jointe au poids de la colonne d'eau rN, doit faire équilibre à la preſſion de l'atmoſphère. Ainſi on pourra déterminer, par la méthode de l'article 89, la hauteur Mr, après le premier ſixième de révolution. On déterminera de même la hauteur Mt de l'eau après le ſecond ſixième de révolution, en conſidérant qu'auſſi-tôt que le coude K, maintenant en D, paſſe ce point, la portion d'air dilaté qui eſt demeurée dans l'intérieur de la pompe, & qui dès ce moment ſe réduit à la quantité $\Pi m^2 \times Ar + \Pi n^2 \times BL$, paſſe au volume $\Pi m^2 \times At + \Pi n^2 \times BG$, quand le point K arrive en H; ainſi de ſuite.

(104.) En général, qu'au premier inſtant les trois coudes de la manivelle ſoient placés aux

points b, k, h. Menez au diamètre vertical BD les perpendiculaires bf, kg, hi. Puis cherchez d'abord la hauteur Mu, à laquelle l'eau s'élève dans le tuyau d'aſpiration, pendant que b va en Q, k en D, h en M. Or, dans cet intervalle de temps, la portion d'air naturel intérieur qui vient à ſe dilater, & qui occupoit un eſpace repréſenté par $\Pi m^2 \times AM + \Pi n^2 \times (Bf + Bg)$, finit par occuper un eſpace $= \Pi m^2 \times Au + \Pi n^2 \times (BD + BL)$. Au moment que le point K paſſe le point D, la portion d'air intérieur dilaté ſe réduit à la quantité $\Pi m^2 \times Au + \Pi n^2 \times BL$; & quand le point K arrive en H, elle paſſe au volume $\Pi m^2 \times Az + \Pi n^2 \times BG$, la hauteur Mz étant alors celle de l'eau dans le tuyau d'aſpiration; ainſi de ſuite.

Il eſt facile d'exprimer analytiquement les aſcenſions progreſſives de l'eau dans le tuyau d'aſpiration, & de s'aſſurer par-là ſi elle arrivera ou non aux corps de pompe. Le détail de ces calculs me meneroit trop loin.



CHAPITRE IX.

CHAPITRE IX.

Des densités de l'atmosphère à différentes hauteurs : usage du Baromètre pour déterminer les différences de ces hauteurs.

(105.) LES couches inférieures de l'atmosphère portant le poids des supérieures, l'air doit avoir, par cette cause seule, une plus grande densité & une plus grande force élastique dans les lieux bas que dans les lieux élevés. Si l'on connoissoit exactement la loi suivant laquelle il se comprime, ou se dilate d'un point à l'autre, on pourroit déterminer, ou par l'état de l'air en un endroit quelconque, la hauteur de cet endroit au-dessus d'un niveau connu, tel, par exemple, que celui de la mer ; ou réciproquement, l'état de l'air, par la hauteur. L'un de ces problèmes est, comme on voit, l'inverse de l'autre ; & la Géométrie fournit toujours des moyens, au moins approchés, pour déterminer la chose inconnue dans ces sortes de questions.

(106.) Soit AB (*Fig. 43*), une colonne verticale de l'atmosphère; MBN un niveau connu. Fig. 43.
Nommons g la gravité; q la hauteur AQ du point extrême A au-dessus du point quelconque Q; x, la hauteur QB du point Q au-dessus du point connu B; φ la densité de l'air en Q, laquelle est une fonction

qui dépend de la hauteur AQ ou BQ, & qui peut renfermer encore dans son expression la chaleur de l'air en Q, ou quelqu'autre qualité physique. Il est clair que le poids du filet AQ est $\int g \varphi dq$, ou $\int - g \varphi dx$. Or, ce poids doit être contre-balancé par la pression que l'air ambiant exerce contre le point Q, pression qui agissant en tous sens, tend à soulever le filet QA; donc si on la nomme p, on aura, $p = \int - g \varphi dx$, ou $dp = - g \varphi dx$, équation dans laquelle il faudra mettre pour φ sa valeur donnée par les phénomènes.

(107.) Lorsque l'air se condense uniquement par son propre poids, & abstraction faite de toutes les causes qui peuvent troubler la loi naturelle de cette condensation, la densité d'une couche quelconque est proportionnelle à la pression. Donc, en nommant P la pression de l'air en B, D sa densité, on aura alors $P : D :: p : \varphi = \frac{pD}{P}$; & par conséquent $dp = - \frac{gDpdx}{P}$, ou $dx = - \frac{P}{gD} \times \frac{dp}{p}$, dont l'intégrale est $x = C - \frac{P}{gD} \times \log. p$. La constante C doit être telle qu'en faisant $x = 0$, on ait $p = P$; donc $C = \frac{P}{gD} \times \log. P$. Ainsi $x = \frac{P}{gD} \times \log. (\frac{P}{p})$.

Maintenant, les pressions P & p pouvant être exprimées par les poids des colonnes de mercure

qui, dans le Baromètre, répondent aux points B & Q, si l'on nomme H & h les hauteurs de ces colonnes, δ la densité du mercure; on aura $P = gH\delta; p = gh\delta$: donc $x = \frac{H\delta}{D} \times \log.(\frac{H}{h})$. Or, dans cette expression, x exprime le logarithme du nombre $(\frac{H}{h})$, dans un système de logarithmes dont le module est $\frac{H\delta}{D}$: désignons par $L.(\frac{H}{h})$ le logarithme du même nombre, dans le système des Tables logarithmiques ordinaires, où le nombre fondamental est 10, & le module, 0,4342944 que je nomme k pour abréger; on aura, comme on sait, $x : L.(\frac{H}{h}) :: \frac{H\delta}{D} : k$; donc $x = \frac{H\delta}{D.k} \times L.(\frac{H}{h})$, ou $x = \frac{H\delta}{Dk} \times (L.H - L.h)$. Par où l'on voit qu'en prenant dans les Tables ordinaires le logarithme du nombre $(\frac{H}{h})$, ou la différence des logarithmes de H & de h; puis multipliant cette différence par la quantité $\frac{H\delta}{D.k}$, on aura la hauteur du point Q au-dessus du point B. Si l'on considère donc ce dernier point comme celui par rapport auquel on veut déterminer la position de plusieurs autres lieux, la question est d'abord de trouver le coéfficient $\frac{H\delta}{Dk}$.

(108.) Prenons pour base, avec M. Bouguer (*Mém. de l'Acad. année 1753, page 515*), qu'en Amérique, à Carabourou, extrémité septentrionale de la première base des triangles qui, dans cette partie du monde, ont servi à déterminer la figure de la Terre, le mercure se tenoit dans le Baromètre à 21 pouces 2 lignes $\frac{3}{4}$, & qu'au sommet de la montagne de Pitchincha, il se tenoit à 15 pouces 11 lignes; & que par une mesure géométrique le second poste se soit trouvé plus élevé que le premier, de 1208 toises. Regardant donc ici le point B comme Carabourou, & le point Q comme le sommet de Pitchincha: nous avons $x = 1208$ toises; $H = 21$ pouces 2 lignes $\frac{3}{4} = 254{,}75$ lignes; $h = 15$ pouces 11 lignes $= 191$ lignes; $L.H = 2{,}4061142$; $L.h = 2{,}2810334$; $L.H - L.h = 0{,}1250808$. Par conséquent on aura $1208 = \frac{H\delta}{Dk} \times 0{,}1250808$; d'où l'on tire $\frac{H\delta}{Dk} = 9658$ toises à peu-près.

Dans cette expression, le nombre k est constant & connu, sa valeur étant 0,4342944; les nombres H, $\frac{\delta}{D}$ dépendent de la position du point B. On voit que connoissant H, on connoîtra aussi, par la formule précédente, la quantité $\frac{\delta}{D}$, c'est-à-dire, le rapport de la densité du mercure à la densité de l'air en B.

Faiſons maintenant quelques applications de la formule générale $x = \frac{H\delta}{Dk}(L.H - L.h)$, ou $x = 9658\ (L.H - L.h)$.

EXEMPLE I. *On demande la poſition d'un village nommé Alauſſy, ſitué au pied de la montagne de Chouſſai, par rapport à Carabourou, en ſuppoſant, comme M. Godin l'a obſervé, que le mercure dans le Baromètre ſe tenoit dans ce village à 21 pouces 1 ligne* $\frac{1}{4}$.

On a $H = 254{,}75$ lignes; $h = 253{,}25$ lignes; $L.H - L.h = 0{,}0025648$. Donc $x = 24{,}77$ toiſes à peu-près, hauteur d'Alauſſy au-deſſus de Carabourou; ce qui s'accorde, à très-peu de choſe près, avec la meſure géométrique.

EXEMPLE II. *On demande la poſition du ſommet de la montagne de Chouſſai, par rapport à Carabourou, en ſuppoſant que le mercure ſe tenoit dans le Baromètre, au ſommet de Chouſſai, à 17 pouces 10 lignes* $\frac{1}{2}$, *comme M. Godin l'a obſervé.*

On a $H = 254{,}75$ lignes; $h = 214{,}5$ lignes; $L.H - L.h = 0{,}0746869$; donc $x = 722{,}95$ toiſes environ, hauteur du ſommet de Chouſſai au-deſſus de Carabourou; ce qui eſt ſenſiblement conforme à la meſure géométrique.

(109.) *REMARQUE I.* Quelque ſimple que ſoit l'uſage de la méthode précédente, M. Bouguer l'a ſimplifié encore. Il a obſervé que pour déterminer la différence des hauteurs de deux endroits

il suffit de prendre la différence des logarithmes de ces hauteurs exprimée en lignes ; de regarder les quatre premières figures de cette différence après le caractéristique, comme exprimant des toises ; d'en retrancher sa trentième partie : le reste exprime en toises la hauteur d'un lieu au-dessus de l'autre. Ainsi, par exemple, la différence des logarithmes des hauteurs du mercure à Carabourou, & au sommet de Pitchincha, réduite en lignes, est 0,1250808 : supposons que 1250 exprime des toises, & retranchons-en sa trentième partie, c'est-à-dire, 42 à peu-près ; le reste, 1208 toises, exprime la hauteur de Pitchincha au-dessus de Carabourou. Il en sera de même pour tous les autres cas où la formule $x = \frac{H\delta}{Dk}(L.H - L.h)$ peut être employée.

(110.) *Remarque II.* Nous observerons en passant que la détermination de la hauteur à
Fig. 31. laquelle l'air qui entre par le trou *E* (*Fig. 31*), dans l'expérience de la pompe de Sévile, peut soutenir l'eau dans le vide, est un problème dépendant des mêmes principes ; car il est clair que la colonne d'eau *ET* peut être regardée comme un poids qui réagit contre l'air inférieur qui le soutient : il n'est pas moins clair que ce poids feroit équilibre à la pression de l'atmosphère en *RP*. Supposons donc, par exemple, que dans le lieu *A* où se fait l'expérience, la pression de l'atmosphère élève l'eau à 32 pieds dans le vide,

ou, ce qui revient au même, le mercure à 28 pouces dans le Baromètre, & que la colonne d'eau *ET* ſoit de 24 pieds, ou équivalente à une colonne de mercure de même baſe & de 21 pouces de hauteur. La queſtion propoſée revient à ceci. On ſait que dans un lieu *A* le mercure ſe ſoutient à 28 pouces dans le Baromètre; on demande la hauteur d'un lieu *R* où le mercure ſe ſoutiendra à 21 pouces. On trouve le lieu *R* plus élevé que le lieu *A*, de 1217 toiſes à peu-près. La colonne d'eau *ET* s'élèveroit donc à cette hauteur, ſi elle ne donnoit point de paſſage à l'air à travers ſa maſſe, & ſi le frottement le long des parois du tuyau ne lui oppoſoit point de réſiſtance.

(111.) SCHOLIE. Il eſt conſtant (ſauf les reſtrictions de l'article 70), qu'une même quantité d'air ſe comprime proportionnellement aux poids dont elle eſt chargée. Indépendamment des preuves qu'on en avoit déjà, M. Bouguer rapporte, dans le Mémoire cité, qu'il a reconnu la vérité de cette loi par une foule d'expériences faites dans les vallées & ſur les ſommets des montagnes du Pérou. De-là il ſuit, comme nous l'avons vu, qu'en ayant ſimplement égard aux poids des couches de l'atmoſphère, les hauteurs des lieux ſont comme les logarithmes des hauteurs correſpondantes du mercure dans le Baromètre; ou, ce qui revient au même, ces dernières hauteurs étant ſuppoſées en progreſſion géométrique, les autres ſont en progreſſion arithmétique. Cette conſéquence a

fait trouver, dans les exemples précédens, les hauteurs refpectives de plufieurs endroits avec beaucoup de précifion. M. Bouguer s'eft fervi également avec fuccès du même principe dans tout le haut de la Cordelière du Pérou. Plus un lieu eft élevé, plus l'air eft libre, dégagé des caufes qui troublent l'équilibre naturel qui devroit réfulter de fon poids, & moins par conféquent la loi des denfités produites par ce poids fubit d'altération. Mais la méthode dont il s'agit s'eft écartée fenfiblement de la vérité dans la partie inférieure de la Cordelière, & fur plufieurs autres montagnes de la Zone Torride. On l'a trouvée auffi en défaut en plufieurs endroits de l'Europe: la caufe de ces erreurs vient des différens degrés de température de l'air en différens endroits. Une chaleur plus ou moins grande, dilate plus ou moins l'air, & trouble la loi des denfités. Il faut donc alors faire quelque correction à la formule de l'article 107, comme on le verra dans le chapitre fuivant.



CHAPITRE X.

Des variations du Baromètre : moyens que fournit le Thermomètre pour rectifier les hauteurs données par le premier instrument.

(112.) LES Baromètres destinés à servir pour des observations que l'on veut comparer entre elles, doivent être construits sur des principes uniformes & réguliers; autrement le mercure ne se tiendra pas à même hauteur dans deux Baromètres placés en un même endroit : souvent même les résultats que donneront séparément deux Baromètres, transportés successivement en plusieurs lieux, ne s'accorderont pas ensemble.

(113.) On trouve dans plusieurs livres de Physique, & en particulier dans les *Recherches* de M. de Luc, *sur les modifications de l'atmosphère*, les meilleures manières de construire les Baromètres. Les principales précautions qu'il faut prendre pour cela, sont 1.° de bien purger d'air le mercure, en sorte qu'on soit assuré que le mercure employé de cette façon dans plusieurs Baromètres, aura la même qualité, la même pesanteur spécifique. 2.° Il faut donner au tube d'un Baromètre deux lignes & demie ou trois lignes de diamètre intérieur, soit pour éviter l'effet de la *capillarité*, soit pour faire sortir plus aisément l'air du tube quand

on conſtruit le Baromètre, ſoit enfin pour rendre moins ſenſibles les expanſions du mercure, produites par la chaleur. 3.° On doit éviter ces vapeurs élaſtiques dont M. Daniel Bernoulli parle dans ſa Pièce ſur *les Courans de la mer,* qui remporta le Prix de l'Académie des Sciences de Paris, en 1751. Ce grand Géomètre, dont la ſagacité à pénétrer les ſecrets de la Nature, étoit extrême, a obſervé le premier qu'il ſe forme autour de tous les fluides, dans le vide, une atmoſphère ou une vapeur élaſtique : cette vapeur eſt produite par la plus légère humidité, & elle eſt extrêmement ſenſible aux impreſſions du chaud & du froid. Si donc le tube d'un Baromètre conſerve quelque humidité, ſi ſes parois intérieures ont été enduites ou touchées par quelque liqueur, telle que de l'eſprit-de-vin, &c. le mercure s'élèvera moins haut dans ce tube que dans un autre bien ſec & bien pur. *Voyez la Diſſertation de M. Bernoulli, pages 25, 26, 27 & 28.*

(114.) Dans les Baromètres pris au haſard, le mercure ſe tient preſque toujours moins haut que dans un Baromètre *parfait*, c'eſt-à-dire, conſtruit ſuivant les principes que je viens d'indiquer. La cauſe de ce défaut d'élévation, vient tout ſimplement, pour l'ordinaire, de ce qu'en conſtruiſant le Baromètre, on a laiſſé une petite quantité d'air dans la partie ſupérieure du tube. Il eſt facile de trouver la relation entre la hauteur totale du tube, celle du mercure, celle que l'air enfermé

occuperoit dans son état naturel, même si le bout supérieur du tube étoit ouvert, & la pression de l'atmosphère mesurée par la hauteur du mercure dans un Baromètre parfait. Car soient (*Fig. 30*) dans un Baromètre imparfait, AB la hauteur du tube, AE celle du mercure, BH celle qu'occuperoit l'air enfermé s'il étoit libre; & supposons $AB = a$, $AE = p$, $BH = q$, la hauteur du mercure dans un Baromètre parfait $= h$. La force élastique de l'air BH qui se dilate en BE, est (67) $h \times \frac{BH}{BE}$, ou $\frac{hq}{a-p}$; & cette force, jointe au poids de la colonne de mercure AE, doit être égale à la pression de l'atmosphère. On a donc l'équation, $p + \frac{hq}{a-p} = h$, ou $ap - pp + hq - ah + hp = 0$, qui contient la relation demandée. On voit que a & h étant supposées données, on trouvera q, connoissant p; ou p, connoissant q. Fig. 30.

(115.) Supposons qu'un Baromètre ait toute la perfection qu'on peut lui donner, & observons son état pendant un long intervalle de temps, dans un même endroit: nous verrons que la hauteur de la colonne de mercure est sujette à de fréquentes variations, par les divers changemens de temps.

1.° Ordinairement le mercure se tient élevé lorsque le temps est beau, fixe, calme & sec; au contraire, le mercure s'abaisse quand le temps

devient changeant, pluvieux, orageux, & que l'air est agité par de grands vents ou fort chargé de vapeurs.

2.° Les plus grandes hauteurs & les plus grands abaissemens du Baromètre, arrivent toujours en hiver; & plus dans un même climat les vicissitudes du chaud & du froid sont grandes, plus aussi les variations du Baromètre sont considérables.

3.° Sur les hautes montagnes, les variations du Baromètre sont très-petites, & quelquefois presque nulles: alors, on trouve avec exactitude les différence de niveaux des lieux, par le moyen de cet instrument.

4.° Dans le voisinage de l'Équateur, les variations du Baromètre sont beaucoup moins sensibles que vers les pôles. Par exemple, à Quito, la hauteur de la colonne de mercure ne varie tout au plus que d'une ligne & demie; & en bas, au bord de la mer, de deux lignes & demie ou trois lignes: à Paris, la variation est de plus de vingt-six lignes.

5.° Si dans un même lieu il arrive, par un beau temps, que le mercure vienne à descendre, il y aura de la pluie ou du vent; si au contraire dans un temps pluvieux le mercure vient à monter, c'est signe d'un prochain beau temps. Dans un temps fort chaud, la descente du mercure prédit le tonnerre: dans un temps froid, l'ascension du mercure annonce la gelée; & au contraire la

descente du mercure, par un temps de gelée, prédit le dégel.

Tels sont les principaux phénomènes des variations du Baromètre. Ces variations indiquent toujours un changement dans l'état de l'atmosphère; mais les suites de ce changement ne sont pas constamment & invariablement les mêmes; & quelquefois, par exemple, on a de la pluie, quand le Baromètre, suivant ses mouvemens ordinaires, semble promettre du beau temps.

(116.) Les Physiciens se sont mis à la torture pour trouver la cause des variations du Baromètre. Mon objet n'est pas de faire l'énumération des systèmes qu'ils ont imaginés sur ce sujet : je me borne à donner une idée générale de quelques-uns des principaux.

Système de M. Léibnitz.

Selon M. Léibnitz, les vapeurs destinées à former la pluie étant d'abord dispersées & soutenues dans l'atmosphère, elles doivent nécessairement augmenter son poids, & par conséquent aussi la pression que l'air exerce sur la surface du mercure contenu dans la cuvette du Baromètre. Ainsi, tant que les vapeurs flottent dans l'air, ou que le beau temps dure, le mercure doit se tenir haut dans le tube. Mais que les vapeurs poussées par les vents, ou par telle autre cause qu'on voudra imaginer, viennent à s'amonceler; elles forment de petits corps plus pesans spécifiquement que l'air, elles doivent donc tomber en pluie. Or, durant quelles

tombent ainſi, elles ſoulagent l'air, d'une partie de leurs poids, conformément aux loix de la Mécanique. En effet, imaginons qu'un corps ſolide de même peſanteur ſpécifique que l'air, & par conſéquent immobile dans l'endroit où il eſt placé, vienne à acquérir, par une cauſe quelconque, un plus grand volume, ſans augmenter de maſſe ou de poids; alors ce corps deſcendra néceſſairement, & la partie de ſon poids qui eſt employée à le faire deſcendre, ceſſera de preſſer l'atmoſphère qui la ſupportoit auparavant. Le choc que ce corps exerce contre l'air, ne compenſe pas la diminution de preſſion dont il s'agit, comme on pourra s'en aſſurer quand on ſaura déterminer la percuſſion des fluides: l'air devient donc plus léger lorſque la pluie tombe; & le Baromètre doit baiſſer. La deſcente du mercure commence un peu avant la pluie, ſoit parce qu'il faut un certain temps aux gouttes d'eau pour ſe former, ſoit parce que les vents les amènent quelquefois d'endroits fort éloignés. Si la pluie n'eſt pas toujours la ſuite de la deſcente du Baromètre, M. Léibnitz en attribue la cauſe aux vents qui emportent ailleurs les gouttes, ou qui les diviſent & les diſperſent dans l'atmoſphère. Aſſurément ce ſyſtème eſt très-ingénieux; il ſatisfait aux principaux phénomènes de la pluie & du beau temps; mais il n'explique point ceux qui ſont relatifs au tonnerre, à la gelée, aux changemens de vents, &c.

M. Halley explique les mouvemens du Baromètre

par l'action des vents sur les vapeurs pluviales flottantes dans l'atmosphère. Suivant ses principes, dans un temps calme & tendant à la pluie, le Baromètre baisse ordinairement, parce que deux vents soufflant en sens contraire, raréfient l'air & le rendent plus léger : dans un temps serein & fixe, le Baromètre est comme le centre où les vents accumulent l'air & le rendent plus pesant ; ainsi le Baromètre doit monter : dans un temps calme & froid, le mercure monte, parce qu'alors il arrive du Nord des vents froids qui amoncellent l'air : les plus grandes variations du Baromètre sont au Nord, parce que les vents du Nord sont plus forts & plus variables que ceux du Sud, &c. On voit que ce système est fondé sur plusieurs suppositions, dont quelques-unes sont difficiles à recevoir, ou paroissent même se contredire. Système de M. Halley.

L'hypothèse de M. de Mairan met aussi en jeu l'action des vents ordinaires, pour condenser ou raréfier l'air. De plus, il y ajoute celle du feu central, qui (selon lui) émane continuellement des entrailles de la terre, & qui produit dans l'air des agitations, des mouvemens, dont les quantités & les directions peuvent être modifiées par plusieurs causes physiques & locales : nouveau champ de suppositions insuffisantes ou gratuites. Système de M. de Mairan.

Depuis que M. le Roi, de la Société Royale de Montpellier, a fait voir (*Mém. de l'Académie, année 1751, page 481*), que l'air tient toujours une certaine quantité d'eau en dissolution, on a Système moderne.

cherché à établir ſur cette baſe une nouvelle explication des variations du Baromètre. On ſuppoſe que les parties aqueuſes, mêlées avec l'air, en diminuent le poids ; & cela peut venir, comme M. de Sauſſure le remarque dans ſon excellent Traité d'*Hygrométrie*, de ce que les vapeurs ſe forment par la converſion de l'eau en un fluide élaſtique, dont le volume, à quantité égale de matière, eſt beaucoup plus grand que celui de l'air pur. L'hypothèſe d'une telle diminution dans le poids de l'air, par l'accumulation des vapeurs pluviales, explique pourquoi l'abaiſſement du mercure dans le Baromètre eſt un ſigne de pluie. L'eau eſt tenue en diſſolution dans l'air par un certain degré de chaleur : quand l'air eſt ſaturé d'eau, & qu'il vient à ſe refroidir, il en abandonne la plus grande partie, qui tombe alors en roſée ou en pluie. Mais en admettant ces effets, on eſt encore très-éloigné d'y pouvoir trouver la cauſe des variations du Baromètre ; car M. de Sauſſure prouve, par le raiſonnement & l'expérience, que la plus grande différence entre l'air ſec & l'air humide, ne peut produire que des variations de deux ou trois lignes dans le Baromètre ; ce qui eſt fort loin de celles que l'on obſerve dans nos climats. Voyez ſon Ouvrage, *pages 283 & ſuivantes.* Je reviens à ce qui regarde plus ſpécialement mon ſujet.

(117.) M. Amontons, l'un des meilleurs Phyſiciens du commencement de ce ſiècle, avoit avancé

(Mém.

(Mém. de l'Acad. 1704, pages 164 & 271), que la chaleur influe sensiblement sur les variations du Baromètre. Des Savans, trompés par des expériences équivoques, nièrent cette proposition. M. de Luc a trouvé que des Baromètres dont le mercure n'avoit pas été purgé par l'action du feu, étoient sujets à des mouvemens irréguliers par le changement de chaleur ; tantôt stationnaires, au moins sensiblement, quand la chaleur augmente; souvent montans, & quelquefois descendans: d'où il a conclu que les Savans dont il s'agit ont été induits en erreur par de semblables Baromètres. Il s'est de plus assuré que les Baromètres purgés d'air par l'action du feu, montoient constamment par la chaleur & descendoient par le froid. Voilà donc des Baromètres réguliers, & ceux qu'il faut employer.

(118.) Avant que de passer plus avant, nous observerons que la différence de chaleur dans l'atmosphère, est la cause de certains courans que l'on y remarque. Soient *(Fig. 44)*, sur un même niveau $ABEF$, deux portions d'air $ABCD$, $EFGH$, dont la première est plus chaude que la seconde. Imaginons deux tuyaux horizontaux mn, pq de communication ; & supposons qu'au premier instant, dans le tuyau inférieur, la pression en m soit égale à la pression en n, ce qui peut avoir lieu, en supposant que la colonne mC, plus rare & moins pesante spécifiquement que la colonne nH, est plus haute en compensation: il est clair Fig. 44.

que dans le tuyau ſupérieur, la preſſion en *p* eſt plus grande que la preſſion en *q*, puiſque la colonne *mp* eſt plus légère que la colonne *nq*; donc il paſſe de l'air de *ABCD* en *EFGH*, par le tuyau *pq*. Or cet air, ainſi introduit, augmente la maſſe d'air *EFGH* & la preſſion en *n*; d'où réſulte un ſecond courant, contraire au premier, de l'air *EFGH* en *ABCD*, par le tuyau inférieur *nm*. Il en feroit de même, ſi on ſuppoſoit au premier inſtant la preſſion en *p* égale à la preſſion en *q*; car alors la preſſion en *n* ſeroit plus grande que la preſſion en *m*; ce qui produiroit d'abord un courant de l'air *EFGH* dans l'air *ABCD*, par le tuyau *nm*; & enſuite un courant de l'air *ABCD* dans l'air *EFGH*, par le tuyau *pq*. On voit par-là que ſi deux chambres voiſines, l'une chaude, l'autre froide, viennent à communiquer enſemble par une porte qu'on ouvre, il s'établit deux courans contraires, l'un inférieur, de la chambre froide dans la chambre chaude; l'autre ſupérieur, de la chambre chaude dans la chambre froide. De même, lorſqu'on allume du feu au foyer d'une cheminée, l'air contenu dans la chambre, & celui qui s'y introduit ſans ceſſe par les vides de la porte ou des fentes, forment un courant inférieur dirigé vers la cheminée, & un courant ſupérieur qui eſt forcé de s'élever par le tuyau de la cheminée & emporte la fumée avec lui; à moins que le tuyau de la cheminée ne ſoit trop large relativement à la chambre, ou que ce

ſecond courant ne rencontre des obſtacles dans ſon chemin ou à ſa ſortie, auxquels cas la fumée ſe répand dans la chambre, &c.

(119.) La température de l'air ſe détermine par le moyen du Thermomètre. On ſait que cet inſtrument eſt compoſé d'une boule & d'un tuyau de verre, dans leſquels on a enfermé hermétiquement une certaine quantité d'un fluide élaſtique, qui, en ſe dilatant par la chaleur, ou en ſe condenſant par le froid, fait connoître à chaque inſtant l'état de l'air dans l'endroit où le Thermomètre eſt placé. Le fluide dont il s'agit peut être de l'eſprit-de-vin, du mercure, de l'huile de lin, &c. On donne la préférence au mercure, parce qu'il eſt très-ſenſible aux impreſſions du chaud ou du froid, & qu'il ne ſe détériore point par le laps du temps. Voyez l'*Eſſai ſur les Thermomètres* du docteur Martine & l'Ouvrage de M. de Luc, déjà cité.

(120.) Le chaud & le froid étant des quantités relatives, les expanſions ou les contractions de la liqueur thermométrique, doivent être rapportées, s'il eſt poſſible, à des termes fixes, ſoit afin de pouvoir comparer le chaud & le froid d'un lieu avec ceux d'un autre, ſoit pour connoître la température relative de différens climats, ſoit pour être en état de faire par-tout un grand nombre d'expériences phyſiques & chymiques, qui demandent un degré précis de chaud ou de froid. Voici quelques

remarques générales sur les Thermomètres les plus usités.

(121.) M. de Réaumur prend pour origine de sa graduation la congélation de l'eau, non la congélation naturelle, qui n'a pas constamment lieu au même degré de froid, mais une congélation artificielle faite avec de la glace & des sels. Pour éviter l'erreur qui pourroit naître de la glace naturelle plus ou moins froide qu'on emploie dans cette opération, il fait sa congélation dans un temps où l'air n'a aucune disposition à geler l'eau, & il prend pour terme fixe, le moment où la première surface de l'eau commence à se geler artificiellement. Il marque ce point par *zéro* sur le tube du Thermomètre; & supposant que toute la liqueur thermométrique comprise dans la partie inférieure, à compter de ce même point, est divisée en 1000 parties égales, il trouve, ou conclut, qu'elle se dilate d'environ 84 parties par la chaleur de l'eau bouillante; ce qui donne un autre point de l'échelle de graduation. J'ai dit *trouve* ou *conclut*, parce que l'esprit-de-vin que M. de Réaumur a presque toujours employé dans ses Thermomètres, commence à bouillir un peu avant l'eau, & ne peut conséquemment marquer que d'une manière incertaine l'ébullition de l'eau. De plus, la chaleur de l'eau bouillante n'est un terme fixe que pour une hauteur fixe du mercure dans le Baromètre : car on a observé que l'eau s'échauffe plus difficilement, mais aussi acquiert & conserve un plus grand degré

de chaleur, à meſure que le Baromètre ſe tient plus haut. Le mercure a l'avantage de pouvoir ſupporter, ſans bouillir, une chaleur très-ſupérieure à celle de l'eau bouillante, & de ne ſe glacer que par un extrême froid. En employant ce fluide dans le Thermomètre de Réaumur, on détermine la chaleur de l'eau bouillante pour une hauteur donnée du Baromètre, avec la même exactitude que la congélation artificielle de l'eau ; & on a alors deux termes fixes de la graduation thermométrique, au-deſſous & au-deſſus deſquels on peut la continuer.

(122.) Dans le Thermomètre de Farenheit, qui a toujours employé le mercure, le terme *zéro* eſt à 32 degrés plus bas que dans celui de Réaumur, & le degré 212 marque la chaleur de l'eau bouillante ; de ſorte que depuis le degré 32, correſpondant au degré *zéro* de Réaumur, juſques au degré 212 correſpondant à l'eau bouillante, il y a 180 degrés. Les degrés ſupérieurs ſervent à meſurer la chaleur des huiles bouillantes, de l'étain fondu, &c. On voit que chaque degré de Réaumur vaut à peu-près deux degrés de Farenheit.

(123.) La graduation du Thermomètre de M. de l'Iſle, au lieu d'aller en montant, va en deſcendant. Il ſuppoſe que le volume du mercure, le Thermomètre étant plongé dans l'eau bouillante, eſt de 10 mille ou 100 mille parties, & il marque en de telles parties au-deſſus & au-deſſous de ce point fixe, tous les degrés de chaleur correſpondans

à tous les degrés possibles de dilatation & de condensation. Ces divisions sont exprimées, contre l'ordinaire, par des nombres qui croissent à mesure que la chaleur décroît. L'exactitude de ce Thermomètre dépend du seul terme de l'eau bouillante, qu'il est par conséquent important de bien déterminer, en le subordonnant à une hauteur donnée du mercure dans le Baromètre.

(124.) On trouve dans les *Transactions Philosophiques, an.* 1701, un Mémoire de Newton, intitulé *Scala graduum caloris & frigoris*, où l'Auteur détermine les degrés de chaud & de froid de plusieurs corps, en faisant usage d'un Thermomètre à l'huile de lin & d'un fer chaud. Il prend pour l'origine ou le degré *zéro* du Thermomètre, la congélation de l'eau en hiver. Il exprime les différens degrés de chaleur par les termes de deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, qui se correspondent, & formées de telle manière que 1 & 12 étant deux termes analogues dans ces deux progressions, les autres paires de termes analogues sont 2 & 24, 3 & 48, 4 & 96, &c. Par-là, Newton trouve, en employant simplement le Thermomètre, que le degré de chaleur du corps humain étant 1 dans la progression arithmétique, & 12 dans la progression géométrique, le degré de chaleur où un morceau de cire flottant sur un bain chaud commence à se fondre, est 2 dans la première progression, & 24 dans la seconde; le degré de chaleur de l'eau

bouillante est 2 $\frac{1}{2}$ dans la première, & 34 dans la seconde ; ainsi de plusieurs autres substances, depuis la glace jusques à l'étain fondu. Mais pour les chaleurs plus grandes, que la boule du Thermomètre ne pourroit supporter sans se fondre ou se briser, Newton continue la double graduation, par le moyen d'un fer chaud, en cette sorte. Il fait rougir au feu un morceau de fer; il observe les progrès de la diminution de chaleur de ce corps exposé en plein air; il suppose que la quantité de chaleur perdue à chaque instant, durant le temps du refroidissement, est proportionnelle à l'excès de la chaleur du corps sur la chaleur de l'air environnant, de sorte que les temps du refroidissement étant supposés en progression arithmétique, les degrés de chaleur forment une progression géométrique; il lie cette dernière progression avec celle qu'on a tirée du Thermomètre, en laissant refroidir le morceau de fer jusques à la température de la chaleur du corps humain; & il continue aussi par-là la progression arithmétique tirée du Thermomètre. Il détermine semblablement la chaleur qui fait fondre plusieurs métaux, ou ce qui revient au même, la chaleur par laquelle ces métaux, fondus d'abord, commencent ensuite à se durcir, en posant sur un fer rougi au feu, un morceau de métal fondu, & observant le temps du refroidissement jusqu'à ce que ce métal commence à se durcir, & que la chaleur du fer devienne égale à celle du corps humain. Toute cette théorie est

très-ingénieuſe; mais on a reconnu que l'hypothèſe de Newton ſur la diminution de chaleur des métaux, s'écartoit ſenſiblement de la vérité, & on a cherché d'autres moyens plus exacts pour arriver au but. Cette diſcuſſion eſt étrangère à mon ſujet.

(125.) Tous les Thermomètres ont un défaut eſſentiel & inévitable. Le verre eſt ſujet aux variations du chaud & du froid; il ſe dilate & ſe condenſe différemment à proportion de ſon épaiſſeur; ce qui trouble la marche naturelle de la liqueur thermométrique. De plus, il peut ſe faire que les degrés d'expanſion de cette liqueur n'expriment pas exactement ceux de la chaleur; il eſt très-poſſible qu'à meſure que la chaleur croît également, elle trouve plus ou moins de difficulté à dilater la même liqueur. Enfin, il me ſemble que pour rendre deux Thermomètres comparables enſemble avec toute la préciſion que le ſujet peut comporter, il faudroit que ces deux inſtrumens euſſent, du moins à peu-près, même figure, mêmes dimenſions, même eſpèce & même quantité de liqueur.

(126.) Si j'écrivois un Traité de Phyſique, je parlerois ici de la ſéchereſſe & de l'humidité de l'air; je ferois connoître la relation que ces deux qualités ont avec la chaleur; je donnerois la deſcription des inſtrumens deſtinés à les meſurer, & que par cette raiſon on nomme *Hygromètres*. Mais, ſur tous ces objets intéreſſans, je ne puis que renvoyer au livre de M. de Sauſſure que j'ai déjà cité.

(127.) Auſſitôt qu'on eut reconnu l'influence de la chaleur ſur la hauteur du mercure dans le Baromètre, les Géomètres-phyſiciens, & en particulier M. Daniel Bernoulli & M. Euler, cherchèrent à introduire cet élément dans la recherche des hauteurs des lieux par le moyen du Baromètre. Ils donnèrent, pour cela, de nouvelles formules plus ou moins ſimples, plus ou moins conformes avec les meſures géométriques. Mais comme quelques-unes de ces meſures manquoient elles-mêmes d'exactitude, ce défaut qu'on ignoroit alors & qu'on a reconnu depuis, fut cauſe que des formules propres à repréſenter certaines obſervations, en contrediſoient d'autres; ce qui a retardé les progrès de cette branche de l'Hydroſtatique-phyſique. Enfin on a fait, dans ces derniers temps, de nouvelles & de nombreuſes expériences ſur cette matière; & on a tâché de ſatisfaire aux obſervations, en appliquant un terme de correction à la formule $x = \frac{H\delta}{Dk}(L.H - L.h)$ que nous avons donnée (107).

(128.) M. de Luc, l'un de ceux qui s'eſt le plus occupé de cet objet, trouve, par les obſervations qu'il a faites ſur les montagnes des environs de Genève & dans ſes voyages, que la formule précédente donne les hauteurs des lieux avec exactitude, & n'a par conſéquent beſoin d'aucune correction, lorſque le mercure dans le Thermomètre de Réaumur, ſe tient à $16\frac{3}{4}$ degrés au-deſſus de la glace. Tel eſt

donc le point d'où il part pour corriger la formule relativement à d'autres degrés de chaleur. La règle qu'il donne en conséquence pour déterminer la différence de niveau de deux lieux *A* & *B*, revient à celle-ci : observez en *A* & *B* les degrés du Thermomètre ; prenez les deux différences de ces degrés à $16\frac{3}{4}$ degrés, en ayant égard aux signes ; ajoutez-les ensemble ; prenez la moitié de la somme, ce qui vous donnera un nombre absolu que je nomme $\pm n$. Alors, x étant la différence de niveau, donnée par la formule non corrigée $x = \frac{H\delta}{D.k}(L.H - L.h)$; y, la véritable différence de niveau qu'on cherche ; on aura, selon M. de Luc, $y = x \pm \frac{x.n}{215}$.

(129.) En 1781, M. Trembley, qui s'est annoncé de très-bonne heure pour un grand Géomètre, envoya à l'Académie des Sciences un Mémoire dans lequel il prouve, d'après un grand nombre d'observations faites avec toute l'exactitude possible aux environs de Genève, par M. le Chevalier de Schuckburgh, & en Angleterre par M. le Colonel le Roi, que la méthode de M. de Luc donne les différences de niveau avec moins d'exactitude que ne les donne la méthode simple ou la formule $x = \frac{H\delta}{Dk}(L.H - L.h)$; d'où il conclut que M. de Luc a mal fixé le degré moyen du Thermomètre. Il fait voir, par la combinaison des observations dont il s'agit, que

le degré moyen du Thermomètre eſt 11 ½, & que le diviſeur de $\pm n$, au lieu d'être 215, doit être 192. Subſtituant donc, dans la formule de M. de Luc, 11 ½ à 16 ¾, & 192 à 215, il obtient, $y = x \pm \frac{n \cdot x}{192}$; formule qui repréſente, à peu de choſe près, les obſervations de M. le Chevalier de Schuckburgh, & de M. le Colonel le Roi. Mais, comme M. Trembley l'obſerve lui-même, toute cette matière a beſoin d'être ſoumiſe encore à de nouvelles expériences. Elles ſont d'autant plus néceſſaires qu'indépendamment de la chaleur, la différence des vents, celle de ſécchereſſe ou d'humidité de l'air, &c. peuvent auſſi produire quelques variations dans les hauteurs du Baromètre en deux endroits : effets à conſtater & à introduire dans le calcul.

Il eſt inutile de faire remarquer qu'on détermine ainſi, au moyen des obſervations du Baromètre & du Thermomètre, faites au lieu du départ & en l'air, les hauteurs auxquelles les Voyageurs aëriens s'élèvent dans les Ballons aéroſtatiques.



CHAPITRE XI.

Principes généraux de l'équilibre des corps flottans sur un fluide.

(130.) LA furface d'un corps folide plongé dans un fluide, eft preffée perpendiculairement en tous fes points par le fluide adjacent, de la même manière & par les mêmes raifons que le fond & les parois d'un vafe font preffés par la liqueur qu'il contient. De toutes ces preffions réfulte une force qui tend à foulever le corps, & qui ne peut être détruite que par la pefanteur même de ce corps, ou par la pefanteur combinée avec une force extérieure. Cherchons donc d'abord la quantité & la direction de la réfultante de toutes les preffions du fluide, afin de pouvoir connoître la force qu'il lui faut oppofer pour établir l'équilibre. Nous aurons befoin, pour cela, des principes de Mécanique qui ont été démontrés dans les articles 10, 11, 12, 13, 14 & 15.

Fig. 45. (131.) THÉORÈME I. *Un corps folide A* (Fig. 45), *plongé dans un fluide, eft foulevé verticalement par ce fluide, avec une force dont la quantité a pour mefure le poids du fluide déplacé, & dont la direction paffe par le centre de gravité de ce même fluide déplacé, ou, ce qui revient au même, par le*

centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide & considérée comme homogène.

Soit MN la surface du fluide; imaginons que la partie MON du corps qui y est plongé soit partagée en une infinité de tranches par des plans horizontaux Ss, Rr; & qu'ensuite la ceinture qui enveloppe chaque tranche & qui en forme la surface convexe, soit partagée en une infinité de trapèzes. Soit G le centre de gravité de l'un quelconque X de ces trapèzes latéraux; par le point G, menons la verticale Gg, & la perpendiculaire PG à la surface du trapèze, & supposons que le plan $MSRN$ passe par ces deux lignes. Il est évident que SR est la hauteur du trapèze, & qu'en menant les verticales SL, RK, la petite droite LK sera la hauteur du trapèze de projection orthogonale sur la surface du fluide; de sorte que si l'on nomme B la largeur moyenne du trapèze X, laquelle est aussi celle du trapèze de projection, la surface du trapèze $X = B \times SR$, & la surface du trapèze de projection $= B \times LK$. De plus, la surface du rectangle dont la base $= B$, & la hauteur est Ry, distance des deux plans horizontaux Ss, Rr, aura pour valeur $B \times Ry$.

Maintenant chacun des trapèzes qui composent la surface convexe d'une tranche, pouvant être considéré comme une partie des parois d'un vase, on voit (28) que le trapèze X est pressé perpendiculairement, ou suivant la direction PG, avec une force P, qui a pour valeur $B \times SR \times Gg$.

Décompofons cette force en deux autres, fituées dans le plan $MSRN$, l'une V verticale, l'autre H horizontale. La hauteur Gg étant la même pour tous les trapèzes latéraux d'une même tranche, la force P, dont la valeur abfolue eft $B \times SR \times Gg$, peut être fuppofée proportionnelle à $B \times SR$, pour tous ces trapèzes; & alors (13) la force V fera proportionnelle à $B \times LK$, & la force H fera proportionnelle à $B \times Ry$. Or (15), toutes les forces H, correfpondantes à tous les rectangles $B \times Ry$, pour une même tranche, fe font équilibre. Par conféquent il ne refte que les forces V: & comme la valeur abfolue de la force P eft $B \times SR \times Gg$, la valeur abfolue de la force V fera $B \times LK \times Gg$, expreffion qui eft celle du petit folide compofé de filets verticaux compris entre le trapèze X & fa projection; puifque fuivant le Théorème du P. Guldin, un tel folide peut être confidéré comme engendré par tous les points du trapèze de projection, qui fe feroient mus verticalement jufqu'à la furface X. Ainfi chaque trapèze latéral eft pouffé verticalement, avec une force qui eft égale au petit folide correfpondant, & qui de plus paffe évidemment par le centre de gravité de ce folide. Or le fluide déplacé par le corps A n'eft autre chofe que la fomme ou la différence de tous ces petits folides. Donc la fomme ou la réfultante de toutes les forces qui tendent à foulever verticalement le corps A, eft égale au poids du fluide déplacé, & paffe par le centre de

gravité de ce fluide, ou par celui de la partie *MON* du corps, plongée dans le fluide & confidérée comme homogène.

(132.) Corollaire I. Si un corps abandonné à l'action de la pesanteur & flottant sur un fluide, est dans une immobilité absolue, ces deux conditions ont toujours lieu tout-à-la-fois. 1.° Le poids du corps est égal au poids du fluide déplacé ; 2.° le centre de gravité du corps & celui de la partie enfoncée dans le fluide, considérée comme homogène, sont placés dans une même ligne verticale. Car pour l'équilibre, il faut 1.° que le poids du corps soit égal à l'effort du fluide qui tend à le soulever verticalement ; 2.° il faut que ces deux forces soient directement opposées.

Quand ces deux conditions n'ont pas lieu tout-à-la-fois, le corps oscille & ne parvient à l'équilibre que lorsque la résistance de l'eau & de l'air, ou d'autres causes, ayant anéanti tous ses mouvemens, il trouve enfin & conserve une situation telle que son poids & la poussée verticale du fluide se détruisent mutuellement. On voit par-là que si l'on veut qu'un vaisseau flottant sur la mer, enfonce dans l'eau une partie *déterminée* de son volume, il faut tellement proportionner & distribuer la charge, qu'en ajoutant son poids à celui de la coque même du vaisseau, la somme soit égale au poids de l'eau qui doit être déplacée; & que de plus les centres de gravité de ces deux poids soient situés dans une même ligne verticale.

(133.) Corollaire II. Le corps étant toujours ſoumis à l'action de ſa peſanteur & de la pouſſée verticale du fluide, & ces deux forces étant ſuppoſées égales & directement contraires; ſi l'on nomme M le volume total de ce corps; N, celui de ſa partie enfoncée dans le fluide & conſidérée comme homogène; p, ſa peſanteur ſpécifique; ϖ, la peſanteur ſpécifique du fluide: l'état d'équilibre ſera repréſenté par l'équation $p \times M = \varpi \times N$, en ſe ſouvenant que le poids abſolu d'un corps (*Notions générales, art. V*), eſt le produit de la peſanteur ſpécifique par le volume. Or, cette équation fait voir, 1.° que ſi $\varpi = p$, on aura $N = M$; c'eſt-à-dire, que ſi le corps flottant & le fluide ont la même peſanteur ſpécifique, le corps s'enfoncera entièrement dans le fluide, & s'y tiendra d'ailleurs indifféremment à telle profondeur qu'on voudra. 2.° Si on a $p < \varpi$, on aura $N < M$; c'eſt-à-dire, que ſi le corps flottant a une peſanteur ſpécifique moindre que celle du fluide, il ne s'y enfoncera qu'en partie. 3.° Comme la plus grande valeur que N puiſſe avoir eſt M, ſi on a $p > \varpi$, on aura $p \times M > \varpi \times N$; donc alors le corps A tombera au fond du vaſe & tendra à deſcendre, ou preſſera le fond du vaſe avec une force $= p \times M - \varpi \times N = (p - \varpi) \times M$, à cauſe qu'ici N devient M.

On voit par-là pourquoi on a plus de peine à ſoutenir un poids hors de l'eau, que lorſqu'il eſt plongé dans l'eau: dans le premier cas on ſoutient tout

tout le poids du corps; dans le fecond, on foutient feulement l'excès du poids du corps fur le poids de l'eau dont il occupe la place.

(134.) COROLLAIRE III. Suppofons que le corps furnage librement, ou que fa pefanteur fpécifique foit moindre que celle du fluide. De l'équation $p \times M = \varpi \times N$, on tire la proportion $p : \varpi :: N : M$, c'eft-à-dire que *la pefanteur fpécifique du corps eft à celle du fluide, comme le volume de la partie du corps plongée dans le fluide, eft au volume total du même corps.* Connoiffant trois termes quelconques de cette proportion, on déterminera celui qui eft inconnu.

(135.) COROLLAIRE IV. Si l'on augmente ou fi l'on diminue le volume N que le corps flottant enfonce dans le fluide, d'une quantité n, il faudra, pour maintenir l'équilibre, augmenter ou diminuer le poids abfolu $p \times M$ du même corps, d'un poids q tel que l'on ait $p \times M \pm q = \varpi \times N \pm \varpi \times n$, ou bien $q = \varpi \times n$. Le poids additionnel ou fouftractif q, eft donc toujours égal au poids du fluide que le corps déplace de plus ou de moins que dans fon premier état.

On déterminera par-là les changemens qui arrivent à la flottaifon d'un Vaiffeau, lorfqu'on fait quelque changement à fa charge ou au volume qu'il enfonce dans la mer.

(136.) *REMARQUE.* Cette tendance que les fluides ont à foulever les corps flottans, eft

employée tous les jours avec ſuccès à tirer des fardeaux très-peſans du fond d'une rivière ou de la mer. On prend pour cela un bateau d'un grand volume, qu'on fait enfoncer profondément en le chargeant de poids très-peſans; en cet état, on l'attache ſolidement au fardeau qu'on veut élever. Enſuite on ôte, en partie ou en totalité, les poids qui l'avoient fait enfoncer; & alors il s'élève en vertu de la pouſſée verticale du fluide, & fait monter le fardeau auquel il eſt attaché, avec une force qui, au premier inſtant, eſt égale à la ſomme des poids dont on l'a déchargé.

(137.) THÉORÈME II. *Si l'on plonge dans un fluide un corps ſolide plus peſant ſpécifiquement que lui, ce corps y perdra une partie de ſon poids, telle qu'on aura cette proportion : le poids abſolu du corps eſt à la perte de poids qu'il fait dans le fluide, comme la peſanteur ſpécifique du corps eſt à la peſanteur ſpécifique du fluide.*

Car puiſque le corps eſt plus peſant ſpécifiquement que le fluide, il s'y enfoncera entièrement (133), & tendra à deſcendre avec une force $= M \times (p - \varpi)$. Or, pour ſoutenir cette force, ſuppoſons que le corps ſoit placé dans l'un des baſſins d'une balance (que par cette raiſon on appelle *balance hydroſtatique)*, lequel baſſin eſt plongé dans le fluide, tandis qne l'autre, ſuſpendu en l'air, eſt chargé du contre-poids convenable; ou, ce qui revient au même, imaginons que la force dont il s'agit

ſoit détruite par une force Q égale & directement oppoſée. On aura $Q = M(p - \varpi)$; ou $pM - Q = M\varpi$; ou $p \times (pM - Q) = p \times M\varpi$; d'où l'on tire $pM : pM - Q :: p : \varpi$; ce qui eſt la proportion du Théorème.

(138.) COROLLAIRE. On voit par-là que connoiſſant le poids abſolu d'un corps ſolide qui s'enfonce entièrement dans un fluide, ou qui a plus de peſanteur ſpécifique que ce fluide, & la perte de poids que fait le corps étant plongé dans le fluide : on connoîtra la peſanteur ſpécifique du fluide, lorſque celle du corps ſera donnée, ou bien réciproquement la peſanteur ſpécifique du corps, lorſque celle du fluide ſera donnée.

(139.) THÉORÈME III. *Si on plonge dans deux fluides différens un même corps ſolide plus peſant ſpécifiquement que chacun d'eux : les peſanteurs ſpécifiques des deux fluides ſeront entr'elles comme les pertes de poids que le corps y fait.*

Car ſoient toujours M le volume du corps propoſé; p ſa peſanteur ſpécifique; ϖ & ϖ' les peſanteurs ſpécifiques des deux fluides; Q & Q' les deux contre-poids du corps, c'eſt-à-dire, les forces qu'il faut employer pour l'empêcher de deſcendre dans les deux fluides : on aura les deux équations $Q = M(p - \varpi)$, $Q' = M(p - \varpi')$. La première donne $M = \frac{pM - Q}{\varpi}$; & la ſeconde, $M = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$. Donc $\frac{pM - Q}{\varpi} = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$;

ou bien $(pM - Q)\varpi' = (pM - Q')\varpi$; d'où l'on tire $\varpi : \varpi' :: pM - Q : pM - Q'$; ce qui eſt la proportion du Théorème.

(140.) COROLLAIRE. Connoiſſant les pertes de poids que fait un même corps plongé ſucceſſivement dans deux fluides, & la peſanteur ſpécifique de l'un des fluides, on connoîtra la peſanteur ſpécifique de l'autre.

(141.) THÉORÈME IV. *Si on plonge dans un même fluide deux corps chacun plus peſans ſpécifiquement que lui, & que ces corps perdent des parties égales de leurs poids : ils auront des volumes égaux.*

Car ſoient M & M' les volumes des deux corps; p & p' leurs peſanteurs ſpécifiques; Q & Q' leurs contre-poids; ϖ la peſanteur ſpécifique du fluide : on aura les équations $Q = pM - \varpi M$, $Q' = p'M' - \varpi M'$. Donc ſi l'on ſuppoſe que les deux corps perdent des parties égales de leurs poids dans le fluide, ou qu'on ait $pM - Q = p'M' - Q'$, on aura auſſi $\varpi M = \varpi M'$, ou $M = M'$; c'eſt-à-dire que les volumes des deux corps ſeront égaux.

(142.) COROLLAIRE. De-là ſuit la manière de réſoudre le problème de la couronne de Hieron, Roi de Syracuſe. Voici en quoi conſiſtoit ce problème.

Hieron ayant fait faire une couronne qui, ſelon ſes conventions avec l'orfévre, devoit être d'or pur, & ſoupçonnant qu'on y avoit mêlé de l'argent,

voulut ſavoir d'Archimède la manière d'éclaircir ce ſoupçon, ſans endommager la couronne. On ne connoît pas bien exactement les moyens qu'Archimède employa pour cela ; mais il y a toute apparence qu'il s'y prit ainſi.

Puiſque les corps qui perdent des parties égales de leurs poids dans un même fluide ont des volumes égaux, il eſt clair que ſi l'on prend un lingot d'or, tel que l'excès de ſon poids dans l'air ou dans le vide ſur ſon poids dans l'eau, ſoit égal à l'excès du poids de la couronne dans le vide ſur ſon poids dans l'eau, ce lingot & la couronne auront des volumes égaux. On déterminera de la même manière un lingot d'argent de même volume que la couronne.

Cela poſé, ſi l'on a trouvé que dans l'air la couronne pèſe moins que le lingot d'or & plus que le lingot d'argent, & ſi l'on eſt aſſuré d'ailleurs qu'elle ne contient que de l'or & de l'argent, on conclura qu'elle n'eſt ni d'or, ni d'argent purs, mais un compoſé de ces deux métaux ; & on trouvera, en général, ce qui y entre de chacun d'eux, par le calcul ſuivant. Soient A & B les poids des deux corps compoſans ; M, le poids du corps mixte ; G, le volume commun aux trois corps ; u & z, les parties des poids A & B qu'il faut prendre pour former M. On aura d'abord, $u + z = M$. D'un autre côté, le volume de u eſt $\frac{Gu}{A}$, comme étant une quatrième proportionnelle

aux trois quantités A, u, G; & de même le volume de z eſt $\frac{Gz}{B}$. Or la ſomme de ces deux volumes eſt G; ce qui donne cette ſeconde équation $\frac{Gu}{A} + \frac{Gz}{B} = G$, ou $Bu + Az = AB$. Donc $u = \frac{A(M-B)}{A-B}$, $z = \frac{B(A-M)}{A-B}$.

Cette méthode ſeroit inſuffiſante, ſi l'eſpèce des métaux étoit inconnue, ſi on ne ſavoit pas, par exemple dans le problème précédent, que la couronne ne contient que de l'or & de l'argent; car il eſt clair qu'on peut faire avec de l'or & un autre métal, tel que du cuivre, un mixte de même poids & de même volume qu'un mixte compoſé d'or & d'argent. De plus, ſi la couronne contenoit plus de deux eſpèces de métaux, qu'on ſût, par exemple, qu'elle eſt compoſée d'or, d'argent & de cuivre, le Problème ſeroit indéterminé; car on peut combiner enſemble ces trois métaux de pluſieurs manières, telles que le mixte réſultant ait le même poids & le même volume. Il en eſt de même *à fortiori* pour un plus grand nombre de métaux.

(143.) *REMARQUE.* On explique par les principes précédens, la conſtruction & l'équilibre des *aréomètres* ou *pèſe-liqueurs.*

La forme d'un aréomètre eſt arbitraire juſqu'à un certain point; elle doit cependant être telle qu'il diviſe facilement le fluide en s'y enfonçant plus ou moins, & qu'il ſe maintienne dans la ſituation

Fig. 46. verticale. Celui de Farenheit (*Fig. 46*), a ces

propriétés. Il eſt compoſé d'un long tube cylindrique CD, & de deux boules creuſes A, B; la plus baſſe B, qui eſt la plus petite, reçoit du mercure, ou quelqu'autre matière peſante qui ſert de *leſt* à l'inſtrument & lui procure de la ſtabilité; l'autre A, toujours ſubmergée, élève le centre de gravité de la partie de l'aréomètre, qui eſt plongée dans le fluide; ce qui augmente encore ſa ſtabilité. Cet inſtrument peut ſervir à trouver les peſanteurs ſpécifiques des fluides, ou en le faiſant enfoncer toujours à la même profondeur, au moyen de poids dont on le charge ou le décharge, ou en lui conſervant le même poids, & lui permettant de s'enfoncer librement à différentes profondeurs; ce qui fait deux cas.

1.° Suppoſons que l'aréomètre s'enfonce juſqu'au point M dans deux fluides différens. Soient P & $P \pm q$ les poids abſolus qu'il doit avoir pour cela; ϖ & ϖ' les peſanteurs ſpécifiques des deux fluides; G le volume de la partie conſtante $MABN$ de l'aréomètre. On aura (133), $P = \varpi \times G$, $P \pm q = \varpi' \times G$. Donc $\varpi' = \frac{\varpi \times (P \pm q)}{P}$. Ainſi connoiſſant P, ϖ, & le poids additif ou ſouſtractif q, on connoîtra ϖ'.

2.° Si l'on veut que l'aréomètre ait toujours le même poids, il s'enfoncera à différentes profondeurs dans deux fluides différens. Soient K, M les points auxquels il s'enfonce; & nommons P ſon poids abſolu; H & G les volumes $KABH$,

$MABN$ plongés dans les deux fluides ; ϖ & ϖ' les pesanteurs spécifiques de ces fluides. On aura $P = \varpi \times H$, $P = \varpi' \times G$; & $\varpi' = \frac{\varpi \times H}{G}$. Connoissant donc ϖ, H, G, on connoîtra ϖ'.

Lorsque l'aréomètre est d'une figure régulière & connue, il est facile de toiser, par les règles de la géométrie, les volumes H, G. Mais ordinairement la forme de l'instrument ne permet pas d'employer cette méthode avec exactitude ; & alors on s'y prendra ainsi. Les points V & K étant les extrêmes des enfoncemens dans la plus pesante & la plus légère des liqueurs dont ont veut comparer les pesanteurs spécifiques : divisez l'intervalle VK en un certain nombre de parties égales ; faites enfoncer successivement l'aréomètre (en augmentant ou diminuant son lest) jusqu'à tous les points de divisions, dans un fluide dont la pesanteur spécifique soit donnée ; & ayant déterminé, par le moyen de la balance ordinaire, les poids absolus & successifs de l'instrument, vous trouverez, par le moyen de l'article 134, les volumes correspondans qu'il enfonce dans le fluide. Il est évident qu'on peut faire en sorte que ces volumes croissent ou décroissent dans tel rapport qu'on voudra, en prenant les poids convenablement.

Les aréomètres sont faits ordinairement ou en verre, ou en cuivre, ou en fer-blanc, &c. Il faut employer le verre pour ceux qui sont destinés à être plongés souvent dans des liqueurs corrosives.

CHAPITRE XII.

Examen des ſituations d'équilibre de divers corps flottans.

(144.) POUR qu'un corps ſolide flottant ſur un fluide ne monte ni ne deſcende, & n'ait aucun mouvement de rotation, il faut 1.° que ſon poids ſoit égal au poids du fluide déplacé ; 2.° que le centre de gravité de ce corps & celui de ſa partie ſubmergée, conſidérée comme homogène, ſoient ſitués ſur la même ligne verticale. Je conſidère des corps flottans qui ont moins de peſanteur ſpécifique que le fluide, & qui par conſéquent ſurnagent: objet utile en pluſieurs occaſions, ſur-tout dans l'Architecture navale. On déterminera de même l'équilibre des corps entièrement ſubmergés, en obſervant qu'alors le volume de la partie ſubmergée eſt le volume total du corps ; & que ſi le corps eſt ſuppoſé ſoutenu dans le fluide par une force étrangère, cette force doit être dirigée de bas en haut, & telle que l'excès du poids du corps ſur cette même force ſoit égal à la pouſſée verticale du fluide.

(145.) THÉORÈME I. *Toute figure plane homogène, diviſée en deux parties égales & ſemblables par ſon axe ſuppoſé vertical, tout ſolide homogène produit par la révolution d'une courbe quelconque autour*

d'un axe vertical, demeurera en équilibre en flottant dans cette situation sur un fluide.

Car il est clair qu'alors, 1.° le poids de la figure ou du solide, moins pesant spécifiquement que le fluide, est soutenu par la poussée verticale & contraire du fluide. 2.° Le centre de gravité de la figure ou du solide, & celui de sa partie enfoncée dans le fluide, sont placés sur une même ligne verticale.

On voit par-là qu'un triangle isocèle, une parabole, un cône droit, un cylindre droit, une sphère, &c. supposés homogènes, demeureront en équilibre sur un fluide, lorsque leurs axes seront verticaux.

(146.) *REMARQUE.* On doit observer que la proposition inverse n'est pas vraie généralement; c'est-à-dire que si un corps homogène, divisé en parties symétriques par son axe, est en équilibre sur un fluide, il ne s'ensuit pas toujours que son axe est vertical. Car nous verrons tout-à-l'heure que ce même corps peut avoir quelquefois plusieurs autres situations d'équilibre.

(147.) THÉORÈME II. *Tout corps prismatique homogène, dont l'axe est horizontal, demeurera en équilibre sur un fluide, lorsque le centre de gravité de la section faite dans son milieu, parallèlement à ses bases, sera dans une même ligne verticale avec celui de la partie de cette section, qui est plongée dans le fluide.*

Car on peut regarder les centres de gravité

du prisme & de sa partie plongée dans le fluide, comme réunis dans les deux points dont nous venons de parler. Le prisme est donc alors en équilibre. Ainsi, pour déterminer la situation d'équilibre de ces sortes de prismes, il suffit de déterminer celle de la section faite dans leur milieu.

(148.) PROBLÈME I. *Trouver la position que doit prendre le triangle homogène* ESG (Fig. 47), *flottant sur le fluide* MN, *pour demeurer en équilibre, en supposant qu'il n'y ait qu'un angle* S *d'enfoncé dans le fluide!* Fig. 47.

Les deux conditions requises pour l'équilibre sont, 1.° que le poids absolu du triangle ESG doit être égal au poids absolu du triangle d'eau MSN.

2.° Que les centres de gravité R & O des deux triangles ESG, MSN doivent être placés dans une même ligne RO verticale, & par conséquent perpendiculaire à la surface MN du fluide. Voici la manière de les remplir.

Ayant divisé, chacune en deux parties égales aux points P, Q, les bases EG, MN des deux triangles ESG, MSN; soient tirées les droites SP, SQ, sur lesquelles on prendra les parties $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, pour déterminer les centres de gravité R, O des deux mêmes triangles. Soient menées les droites RO, PQ, qui seront parallèles entr'elles, puisque les côtés

du triangle SPQ ſont coupés proportionnellement en R & O; & de plus perpendiculaires à MN, puiſque RO doit être verticale. Du point P ſoient abaiſſées les perpendiculaires PA, PD ſur les côtés SE, SG du triangle ESG prolongés lorſqu'il eſt néceſſaire; & ſoient tirées les droites PM, PN qui ſont évidemment égales entr'elles, à cauſe de $QM = QN$, & de PQ perpendiculaire ſur MN.

Suppoſons:

SE	....	$= a$
SG	....	$= b$
SP	....	$= c$
le ſinus total	....	$= 1$
l'angle donné PSE	....	$= m$
l'angle auſſi donné PSG	....	$= n$
SM	....	$= x$
SN	....	$= y$
la peſanteur ſpécifique du triangle	....	$= p$
la peſanteur ſpécifique du fluide	.....	$= \varpi$.

Les deux triangles ESG, MSN qui ont l'angle commun S ſont entr'eux comme les produits $SE \times SG$, $SM \times SN$. Ainſi on aura, par la première condition de l'équilibre, $pab = \varpi xy$.

Dans le triangle rectangle PAS, on a $PA = PS$. ſin. $PSA = c$ ſin. m; $SA = PS$ coſ. $PSA = c$ coſ. m. On a pareillement dans le triangle rectangle PDS, $PD = c$ ſin. n; $SD = c$ coſ. n. Donc $AM = c$ coſ. $m - x$; $DN = c$ coſ. $n - y$; $(PM)^2 = (c$ ſin. $m)^2 + (c$ coſ. $m - x)^2$; $(PN)^2 = (c$ ſin. $n)^2$

$+ (c \operatorname{cof.} n - y)^2$. Or $(PM)^2 = (PN)^2$. Ainſi on aura l'équation $(c \operatorname{ſin.} m)^2 + (c \operatorname{cof.} m - x)^2 = (\operatorname{ſin.} n)^2 + (c \operatorname{cof.} n - y)^2$, ou ſimplement $xx - 2cx \operatorname{cof.} m = yy - 2cy \operatorname{cof.} n$, parce que $(\operatorname{ſin.} m)^2 + (\operatorname{cof.} m)^2 = 1$, & $(\operatorname{ſin.} n)^2 + (\operatorname{cof.} n)^2 = 1$. Cette équation remplit la ſeconde condition de l'équilibre.

Il eſt aiſé de trouver les valeurs de x & de y par la conſtruction de deux hyperboles. Mais en employant la voie de l'élimination, & chaſſant y, on parviendra à l'équation déterminée,

$$x^4 - 2cx^3 \operatorname{cof.} m + \frac{2cpabx \operatorname{cof.} n}{\varpi} - \frac{p^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

dont les racines combinées avec l'équation $y = \frac{pab}{\varpi x}$, feront connoître les différentes poſitions du triangle, qui admettent l'équilibre.

(149.) COROLLAIRE I. On ſait par la règle de Deſcartes, que dans toute équation dont les racines ſont réelles, il y en a autant de poſitives que les ſignes $+$ & $-$ s'y trouvent de fois être changés : & autant de négatives qu'il s'y trouve de fois deux ſignes $+$, ou deux ſignes $-$, qui s'entreſuivent. Ainſi, puiſque le terme qui devroit contenir x^2 manque dans notre équation, on voit que ſi toutes ſes racines ſont réelles, il y en aura néceſſairement trois poſitives & une négative. La racine négative ne peut pas ſervir, parce que la peſanteur n'ayant qu'une direction, la droite SM ne peut en conſéquence être placée que d'un ſeul

côté par rapport au point S. Mais les racines positives indiqueront des positions réelles d'équilibre, pourvu que l'on ait de plus $x < a$, & $y < b$.

(150.) COROLLAIRE II. Supposons, pour faire une application simple de notre équation générale, que le triangle proposé ESG soit isocèle. On aura $b = a$, cos. $n =$ cos. m; & l'équation générale deviendra, $x^4 - 2cx^3 \text{ cos. } m + \frac{2cpa^2 x \text{ cos. } m}{\varpi} - \frac{p^2 a^4}{\varpi^2} = 0$; d'où l'on tire ces deux équations du second degré, $x^2 - \frac{a^2 p}{\varpi} = 0$, $x^2 - 2cx \text{ cos. } m + \frac{a^2 p}{\varpi} = 0$.

La première donne $x = \pm a \sqrt{[\frac{p}{\varpi}]}$, ou simplement $x = a\sqrt{[\frac{p}{\varpi}]}$, parce que la racine positive est seule utile. Or comme on a toujours $y = \frac{pab}{\varpi x}$, on aura aussi $y = a\sqrt{[\frac{p}{\varpi}]}$. Donc $y = x$. Ainsi le triangle MSN est isocèle de même que le triangle ESG, ou ce qui revient au même, la base EG du triangle proposé est parallèle à la surface du fluide.

La seconde équation donne $x = c \text{ cos. } m \pm \sqrt{[(c \text{ cos. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]}$. Ainsi à cause de $y = \frac{pa^2}{\varpi x}$, on aura

$$y = \frac{pa^2}{\varpi(c \text{ cos. } m \pm \sqrt{[(c \text{ cos. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]})}$$

$= c \text{ cof. } m \mp \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]}$. Ce fecond cas donne donc les deux combinaifons fuivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c \text{ cof. } m + \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]} \\ y = c \text{ cof. } m - \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c \text{ cof. } m - \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]} \\ y = c \text{ cof. } m + \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]} \end{array} \right\}$$

qui indiquent deux nouvelles fituations d'équilibre, lorfque les valeurs de x & de y font réelles, & que de plus on a $x < a$, & $y < a$. Or pour que ces deux conditions foient remplies, il faut que l'on ait

1.° $\frac{a^2 p}{\varpi} < (c \text{ cof. } m)^2$, ou $\frac{p}{\varpi} < \frac{(c \text{ cof. } m)^2}{a^2}$.

2.° $a > c \text{ cof. } m + \sqrt{[(c \text{ cof. } m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}]}$,

ou $\frac{p}{\varpi} > \frac{2 a c \text{ cof. } m - a a}{a a}$.

Les limites entre lefquelles eft renfermée alors la valeur de $\frac{p}{\varpi}$ font donc $\frac{(c \text{ cof. } m)^2}{a^2}$ & $\frac{2 a c \text{ cof.} m - a a}{a a}$.

Par exemple, lorfque le triangle propofé eft équilatéral, on a $c \text{ cof. } m = \frac{3}{4} a$; & ce triangle, outre la première fituation d'équilibre indiquée par la première équation, pourra en avoir encore deux autres, pourvu que l'on ait $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{16}$ & $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{16}$, ou que la

valeur de $\frac{\varpi}{p}$ ſoit compriſe entre les deux fractions $\frac{9}{10}$ & $\frac{8}{16}$.

(151.) PROBLÈME II. *Trouver la poſition que* Fig. 48. *doit prendre le triangle homogène* S E G (Fig. 48), *flottant ſur un fluide* M N, *pour demeurer en équilibre, en ſuppoſant que les deux angles* E, G *ſoient enfoncés dans le fluide !*

Il n'y a, pour réſoudre ce problème, qu'à renverſer de haut en bas la Figure relative au précédent, en procédant comme il ſuit.

Les trois centres de gravité du triangle *SEG*, du trapèze *MNGE* & du triangle *SMN* ſont toujours placés dans une même ligne droite. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que le centre de gravité du triangle propoſé *SEG* & celui de ſa partie *MNGE* plongée dans le fluide, ſoient dans une même ligne verticale. Donc les centres de gravité des deux triangles *SEG*, *SMN* ſont auſſi placés dans une même ligne verticale. Du ſommet *S*, je mène aux milieux des baſes *EG*, *MN* les droites *SP*, *SQ*; & ayant pris $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, je tire par les centres de gravité *R*, *O* des deux triangles *SEG*, *SMN*, la droite *RO* qui eſt verticale, ou perpendiculaire à la ſurface du fluide. Soient joints les points *P* & *Q*, par la droite *PQ* qui eſt parallèle à *RO*; & du point *P* ſoient menées les

les droites PM, PN, & les perpendiculaires PA, PD, fur SE, SG refpectivement. On aura, comme ci-deffus, $PM = PN$. Cela pofé,

Soient
- SE .... $= a$
- SG .... $= b$
- SP .... $= c$
- le finus total .... $= 1$
- l'angle donné PSE .... $= m$
- l'angle auffi donné PSG .... $= n$
- SM .... $= x$
- SN .... $= y$
- la pefanteur fpécifique du triangle SEG. $= p$
- la pefanteur fpécifique du fluide..... $= \varpi$.

On a $SEG : SMN :: SE \times SG : SM \times SN$; & par conféquent $SEG - SMN$ ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$. Ainfi le quadrilatère $EMNG = \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$. Or la première condition de l'équilibre demande que l'on ait $p \times SEG = \varpi \times EMNG$; on aura donc $p \times SEG = \varpi \times \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$, ou bien, $pab = \varpi(ab - xy)$.

On a, comme ci-deffus, $PA = c$ fin. m, $SA = c$ cof. m, $PD = c$ fin. n, $SD = c$ cof. n, $AM = c$ cof. $m - x$, $DN = c$ cof. $n - y$, $(PM)^2 = (c \text{ fin. } m)^2 + (c \text{ cof. } m - x)^2$, $(PN)^2 = (c \text{ fin. } n)^2 + (c \text{ cof. } n - y)^2$.

Ainsi, à cause de $PM = PN$, on aura, $xx - 2cx \text{ cos. } m = yy - 2cy \text{ cos. } n$.

Comparant cette équation avec la précédente, on trouvera, $x^4 - 2cx^3 \text{ cos. } m + \frac{2c(\varpi - p)abx \text{ cos. } n}{\varpi} - \frac{(\varpi - p)^2 a^2 b^2}{\varpi^2} = 0$, équation dont les racines combinées avec l'équation $pab = \varpi(ab - xy)$ donneront les différentes situations d'équilibre du triangle.

On voit assez que la remarque générale de l'article 149 s'applique également ici.

(152.) COROLLAIRE. Soit SEG un triangle isocèle. On aura $b = a$, cos. $n =$ cos. m; & notre équation deviendra $x^4 - 2cx^3 \text{ cos. } m + \frac{2c(\varpi - p)a^2 x \text{ cos. } m}{\varpi} - \frac{(\varpi - p)^2 a^4}{\varpi^2} = 0$, d'où l'on tire ces deux autres équations,

$$x^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - 2cx \text{ cos. } m + \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

dont la première donne $x = a\sqrt{[\frac{\varpi - p}{\varpi}]}$, $y = a\sqrt{[\frac{\varpi - p}{p}]}$, & fait voir que le triangle est en équilibre lorsque sa base EG est horizontale; la seconde donne ces deux combinaisons,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c \text{ cos. } m + \sqrt{[(c \text{ cos. } m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}]} \\ y = c \text{ cos. } m - \sqrt{[(c \text{ cos. } m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}]} \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} x = c \operatorname{cof.} m - \sqrt{[(c \operatorname{cof.} m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}]} \\ y = c \operatorname{cof.} m + \sqrt{[(c \operatorname{cof.} m)^2 - \frac{a^2(\varpi - p)}{\varpi}]} \end{cases}$$

qui repréfenteront deux nouvelles fituations d'équilibre, pourvu que l'on ait 1.° $\frac{p}{\varpi} > \frac{a^2 - (c \operatorname{cof.} m)^2}{a^2}$; 2.° $\frac{p}{\varpi} < \frac{2aa - 2ac \operatorname{cof.} m}{a^2}$.

Par exemple, quand le triangle SEG eft équilatéral, ou qu'on a $c \operatorname{cof.} m = \frac{3}{4} a$, fi l'on a de plus $\frac{p}{\varpi} > \frac{7}{16}$ & $\frac{p}{\varpi} < \frac{8}{16}$; ce triangle aura trois fituations d'équilibre fur le fluide.

(153.) PROBLÈME III. *Trouver la pofition que doit prendre le rectangle homogène* B H S K (Fig. 49) *flottant fur un fluide, pour demeurer en équilibre, en fuppofant qu'il n'y ait que l'angle* S *d'enfoncé dans le fluide!* Fig. 49.

Qu'on mène du point S au point Q milieu de MN la droite SQ, & qu'on prenne $SO = \frac{2}{3} SQ$; le point O fera le centre de gravité du triangle MSN. Or comme le centre de gravité du rectangle $BHSK$ eft au point d'interfection R des deux diagonales BS, HK, il s'enfuit que, fi par ce point R & par le point O on tire la droite RO, cette ligne, par les conditions de l'équilibre, fera verticale, ou perpendiculaire à la furface MN du fluide.

Soit prise $RP = \frac{SR}{2}$, & soit menée la ligne PQ qui sera évidemment parallèle à RO, & par conséquent perpendiculaire sur le milieu de MN. D'où il suit que les droites PM, PN seront égales. Enfin du point P, soient abaissées les perpendiculaires PA, PD sur SH, SK respectivement.

Soient
- SH . . . . $= a$
- SK . . . . $= b$
- SM . . . . $= x$
- SN . . . . $= y$
- la pesanteur spécifique du rectangle $BHSK$ . . . . $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide . . . . . $= \varpi$.

La première condition de l'équilibre donne l'équation $pab = \frac{\varpi . xy}{2}$.

De plus, puisque l'on a $SP = \frac{3}{4}\, SB$, on aura $PA = \frac{3}{4}\, BH = \frac{3}{4}\, b$, $SA = \frac{3}{4}\, SH = \frac{3}{4}\, a$, $PD = \frac{3}{4}\, BK = \frac{3}{4}\, a$, $SD = \frac{3}{4}\, SK = \frac{3}{4}\, b$. Donc $(PM)^2 = \frac{9b^2}{16} + (\frac{3}{4}a - x)^2$, $(PN)^2 = \frac{9a^2}{16} + (\frac{3}{4}b - y)^2$. Ainsi, à cause de $PM = PN$, on aura $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$.

Comparant cette équation avec la précédente, & éliminant y, on aura l'équation déterminée

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{\varpi} - \frac{4p^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

par le moyen de laquelle on trouvera les différentes ſituations d'équilibre du rectangle.

(154.) COROLLAIRE. Soit le rectangle propoſé un carré. On aura $b = a$; notre équation devient

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pa^3x}{\varpi} - \frac{4p^2a^4}{\varpi^2} = 0,$$

& ſe décompoſe en ces deux autres équations,

$$x^2 - \frac{2pa^2}{\varpi} = 0;\ x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{\varpi} = 0.$$

La première donne $x = a\surd[\frac{2p}{\varpi}]$, $y = a\surd[\frac{2p}{\varpi}]$; d'où l'on voit que le carré eſt en équilibre, lorſque ſa diagonale *HK* eſt horizontale, ce qui eſt évident par ſoi-même. La ſeconde donne

$$x = \frac{a[3 \pm \surd\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}]}{4},$$

$$y = \frac{a[3 \mp \surd\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}]}{4},$$

d'où réſultent deux nouvelles ſituations d'équilibre, lorſqu'on a $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{32}$ & $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{32}$.

(155.) *REMARQUE*. On trouve par la même méthode la poſition d'équilibre d'un rectangle dont trois angles ſeroient ſubmergés. Car on n'a pour cela qu'à imaginer que la *Figure 49* eſt renverſée de bas en haut, que les trois angles *B, H, K* ſont ſubmergés, & que le triangle *MSN* eſt la partie

du rectangle, faillante au-deffus de la furface *MN* du fluide. Ainfi en confervant les mêmes dénominations, on aura évidemment ces deux équations,

$$pab = \varpi\left(ab - \frac{xy}{2}\right);\ xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2},$$

qui réfolvent le nouveau problème.

(156.) PROBLÈME IV. *Trouver la pofition que* Fig. 50. *doit prendre le rectangle homogène* BHSK (Fig. 50), *flottant fur un fluide, pour demeurer en équilibre, en fuppofant que les deux angles* H *&* S *foient plongés dans le fluide!*

Du point *M*, où le côté *BH* rencontre la furface *MN* du fluide, menez au côté oppofé *KS* la perpendiculaire *MI*; ce qui partage le trapèze fubmergé *MHSN* en un triangle *MIN* & un rectangle *MHSI*; élevez, par l'angle *H*, la verticale *HL*; des centres de gravité *T*, *G*, *O*, *R*, du triangle *MIN*, du rectangle partiel *MHSI*, du trapèze *MHSN*, & du rectangle total *BHSK*, menez à *HB* les perpendiculaires *TE*, *GX*, *OV*, *RZ*; menez de plus, des points *O*, *R*, *V*, *Z*, les horizontales *OQ*, *RY*, *VC*, *ZL*; & par les points *V*, *Z*, abaiffez les verticales *VD*, *ZA*.

Soient
- SH .... $= a$
- HB .... $= b$
- HM .... $= x$
- SN .... $= y$
- la pefanteur fpécifique du rectangle... $= p$
- celle du fluide.................. $= \varpi$.

On a d'abord, par la première condition de l'équilibre, $p \times BHSK = \varpi \times MHSN$, d'où $MHSN = \frac{pab}{\varpi}$, ou $\frac{a(x+y)}{2} = \frac{pab}{\varpi}$ ou $x + y = \frac{2pb}{\varpi}$, ou $y = \frac{2pb}{\varpi} - x$.

En considérant les momens du triangle MIN du rectangle $MHSI$, & du trapèze $MHSN$ par rapport à HB comme axe, on aura, par la propriété des momens, $MHSN \times OV = MIN \times TE + MHSI \times GX$, ou $MHSN \times OV = \frac{MI \times IN}{2} \times \frac{2}{3} MI + HM \times MI \times \frac{MI}{2}$, ou (en nommant D la droite OV), $\frac{pabD}{\varpi} = \frac{a^2(y-x)}{3} + \frac{a^2 x}{2}$, ou $D = \frac{\varpi.(2ay+ax)}{6pb}$.

Le centre de gravité O du trapèze $MHSN$ est évidemment placé au milieu de la droite aOb, parallèle aux côtés opposés MH, NS; ce qui donne Oa, ou $HV = \frac{HM + ca}{2} = \frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}$.

Maintenant, le triangle MIN, comparé successivement avec les triangles HCV, ODV, HLZ, RAZ, qui lui sont tous semblables, donne $CV = \frac{IN \times HV}{MN}$, $OD = \frac{MI \times OV}{MN}$, $LZ = \frac{IN \times HZ}{MN}$, $RA = \frac{MI \times RZ}{MN}$, c'est-à-dire (en nommant, pour abréger un peu, MN, z),

$CV = [\frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}] \times \frac{(y-x)}{z}$,

$OD = \frac{aD}{z}$, $LZ = \frac{b(y-x)}{2z}$, $RA = \frac{a^2}{2z}$. Donc $OQ = OD + VC = \frac{aD}{z} + [\frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}] . \frac{(y-x)}{z}$; $RY = RA + ZL = \frac{a^2}{2z} + \frac{b(y-x)}{2z}$. Or, puisqu'en vertu de la seconde condition de l'équilibre, les centres de gravités O, R, doivent être placés sur une même ligne verticale, on a $OQ = RY$, c'est-à-dire (en négligeant z, qui est diviseur de tous les termes), $aD + [\frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}] \times (y-x) = \frac{a^2}{2} + \frac{b(y-x)}{2}$, ou $D[2a^2 + (y-x^2)] = a^3 + ab(y-x) - ax \times (y-x)$. Substituant dans cette équation pour D sa valeur $\frac{\varpi(2ay+ax)}{6pb}$ trouvée ci-dessus; substituant ensuite pour y sa valeur $\frac{2pb}{\varpi} - x$: on parviendra à l'équation déterminée du troisième degré

$$\left(\frac{\varpi(\frac{4pb}{\varpi}-x)}{6pb}\right)[2a^2+(\frac{2pb}{\varpi}-2x)^2] = a^2 + (b-x)(\frac{2pb}{\varpi}-2x)$$

, ou $\varpi a^2(\frac{pb}{\varpi}-x) + 2\varpi(\frac{4pb}{\varpi}-x)(\frac{pb}{\varpi}-x)^2 = 6pb \times (b-x).(\frac{pb}{\varpi}-x)$; équation divisible par $\frac{pb}{\varpi}-x$, & qui donne par conséquent d'abord

$x = \frac{pb}{\varpi}$; ensuite l'équation du second degré

$$x^2 - \frac{2pbx}{\varpi} + \frac{4p^2b^2}{\varpi^2} - \frac{3pb^2}{\varpi} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

La valeur de x, donnée par la première équation $x = \frac{pb}{a}$, étant substituée dans l'équation $y = \frac{2pb}{\varpi} - x$, donne aussi $y = \frac{pb}{a}$. Ainsi les lignes x & y sont égales; d'où il suit que le rectangle est en équilibre lorsque le côté plongé dans le fluide est horizontal, ce qui est évident par soi-même. L'équation du second degré, donne (en déterminant d'abord x, puis mettant pour x sa valeur dans l'équation $y = \frac{2pb}{\varpi} - x$),

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{pb \pm \sqrt{[3b^2(\varpi p - p^2) - \frac{a^2\varpi^2}{2}]}}{\varpi} \\ y = \dfrac{pb \mp \sqrt{[3b^2(\varpi p - p^2) - \frac{a^2\varpi^2}{2}]}}{\varpi}. \end{array}\right\}$$

Ainsi le rectangle proposé pourra avoir deux nouvelles situations d'équilibre, pourvu que, 1.° les valeurs de x & de y soient réelles; 2.° qu'elles soient positives; 3.° que chacune d'elles soit moindre que b.

(157.) COROLLAIRE. Supposons que le rectangle proposé devienne un carré, ou que l'on ait $b = a$. Ce carré est d'abord en équilibre,

lorſque ſon côté qui eſt plongé dans le fluide eſt horizontal. De plus on a ces équations,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{ap + a\sqrt{[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}]}}{\varpi} \\ y = \frac{ap - a\sqrt{[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}]}}{\varpi} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{ap - a\sqrt{[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}]}}{\varpi} \\ y = \frac{ap + a\sqrt{[3(\varpi p - p^2) - \frac{\varpi^2}{2}]}}{\varpi} \end{array}\right\}$$

d'où ſuivent deux nouvelles ſituations d'équilibre lorſque la fraction $\frac{p}{\varpi}$ ſera compriſe entre $\frac{3}{4}$ & $\frac{3 + \sqrt{3}}{6}$.

(158.) PROBLÈME V. *Trouver la poſition que* Fig. 51. *doit prendre la parabole homogène* ABC (Fig. 51), *flottante ſur un fluide pour demeurer en équilibre, en ſuppoſant que ſa partie* FMN *ſoit ſeule plongée, & que les points* B, C *ſoient hors du fluide!*

Il eſt d'abord évident que la parabole *ABC*, ſuppoſée moins peſante ſpécifiquement que le fluide, eſt en équilibre lorſque ſon axe eſt vertical. Mais il s'agit ici de ſavoir en général ſi elle ne peut pas encore être en équilibre, quand ſon axe eſt incliné.

Soient *AD* l'axe de la courbe, *BD* ou *BC* ſa

dernière ordonnée. Ayant tiré par le point H, milieu de MN, & parallèlement à DA, le diamètre HF, je mène du point F l'ordonnée FG, la droite FX au foyer X, & la tangente FT qui rencontre en T l'axe DA prolongé, & qui, par la propriété de la parabole, est parallèle à MN. Du point M, j'abaisse MY perpendiculaire sur FH prolongée. Je joins les centres de gravité K & I de la parabole ABC & de sa partie FMN, par la droite KI qui, en vertu de l'équilibre, doit être verticale, ou perpendiculaire à MN.

Soient:

AD	....	$= a$
BD	....	$= b$
le paramètre de l'axe $AD = \frac{bb}{a}$	...	$= c$
FH	....	$= x$
MH	....	$= y$
FG	....	$= z$
la pesanteur spécifique de la parabole	...	$= p$
la pesanteur spécifique du fluide	....	$= \varpi$.

On aura, par la propriété de la parabole, $AK = \frac{3}{5} AD = \frac{3}{5} a$; $FI = \frac{3}{5} FH = \frac{3}{5} x$; $GT = 2GA = \frac{2z^2}{c}$; $FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$.

Les deux triangles semblables FGT, MYH, donnent $FT : FG :: MH : MY = \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$. Or, l'aire parabolique $ABC = \frac{4}{3} BD \times DA$, & l'aire $FMN = \frac{4}{3} MY \times FH$. Ainsi on aura, par la première condition de l'équilibre,

$$pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}.$$

Comme la ſeconde condition de l'équilibre eſt évidemment remplie lorſque l'axe de la parabole eſt vertical, & que par conſéquent $z = 0$, on voit, par l'équation précédente, que dans ce cas particulier, on a $pab = \varpi yx = \varpi x \sqrt{cx}$, en obſervant qu'alors $y = \sqrt{cx}$. D'où réſulte $x = a \sqrt[3]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$. Mais revenons au problème général où le point F ne tombe pas ſur le point A.

La propriété de la parabole donne $FX = \frac{cc+4zz}{4c}$; $yy = x \times 4FX = \frac{x(cc+4zz)}{c}$, & $y = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{(cc+4zz)}}{\sqrt{c}}$. Subſtituant cette valeur de y dans l'équation générale $pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, on trouvera $x = a \sqrt[3]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$; d'où l'on voit que la valeur de x eſt toujours la même, quelle que puiſſe être la poſition de la parabole ſur le fluide *.

La droite KI étant perpendiculaire à MN, les deux triangles FGT, ILH ſont ſemblables & donnent $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$.

---

* Nous obſerverons à cette occaſion, que ſi dans une parabole les abſciſſes de deux diamètres quelconques, comptées de leurs ſommets, ſont égales; les parallélogrammes formés par les deux ordonnées, les deux tangentes & les autres côtés parallèles aux diamètres, ſeront égaux, & les eſpaces paraboliques ſeront auſſi égaux; ce qui eſt analogue à la propriété qu'ont les parallélogrammes faits autour de diamètres conjugués, dans l'ellipſe ou l'hyperbole, d'être égaux entr'eux.

Donc $LO = HO - HL = FT - HL$ $= \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$. Les deux triangles ſemblables FGT, KLO donnent $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mais d'un autre côté, on a $OK = KA - OA$ $= KA - (OT - AT) = \frac{3}{5}a - x$ $+ \frac{z^2}{c}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de OK, on trouvera $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ou bien (en mettant pour x ſa valeur trouvée ci-deſſus), $zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[3]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$; ce qui donne deux nouvelles ſituations d'équilibre, ſemblables, l'une à droite, l'autre à gauche, pourvu que l'on ait $6a > 5c + 6a \times \sqrt[3]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$, ou $\frac{p}{\varpi} < (\frac{6a - 5c}{6a})^{\frac{3}{2}}$, quantité ſuppoſée réelle & poſitive.

(159.) PROBLÈME VI. *On ſuppoſe maintenant que la parabole* ABC *n'ait pas le même centre de gravité que de figure, ſoit parce qu'elle n'eſt pas homogène dans toute ſon étendue, ſoit parce qu'elle eſt chargée de quelque corps étranger placé ailleurs qu'à ſon centre de figure, & lié ſolidement avec elle : il s'agit de trouver la poſition qu'elle doit prendre pour être en équilibre ſur le fluide* MN !

Soit le point K' le centre de gravité du ſyſtème

de tous les poids dont la parabole ABC eſt chargée, & qui font équilibre à la pouſſée verticale & contraire du fluide. Ce point K' étant donné de poſition, ſi l'on mène la droite $K'V$ perpendiculaire à l'axe AD de la parabole, cette ligne & la partie correſpondante AV de l'axe ſeront données. Soit FMN l'eſpace parabolique, plongé dans le fluide. Par le centre de gravité I de cet eſpace conſidéré comme homogène, & par le point K', je mène la droite IK' qui doit être néceſſairement verticale à cauſe de l'équilibre, & qui va rencontrer en K l'axe AD. J'achève la conſtruction comme dans l'article précédent, & je garde les mêmes dénominations, en faiſant de plus $K'V = k$, $AV = h$; & obſervant que par p on doit entendre ici la peſanteur ſpécifique d'un corps de même poids que la parabole ABC, & dont le volume feroit l'aire ABC ſuppoſée homogène. On trouvera, comme tout-à-l'heure, l'équation, $pab = \frac{\varpi c y x}{\sqrt{(cc + 4zz)}}$, qui remplit la première condition de l'équilibre. Enſuite on trouvera $x = a \sqrt[3]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$.

Les trois triangles ſemblables FGT, ILH, KLO, donnent, comme ci-deſſus, $OK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$; & les deux triangles ſemblables FGT, KVK' donnent $GT : FG :: VK' : VK$

$= \frac{ck}{2z}$. Donc $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$. Mais d'un autre côté, $OV = VT - OT = AV + AT - HF = h + \frac{z^2}{c} - x$. Égalant entr'elles les deux valeurs de OV, on trouvera $10z^3 - (10ch - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0$, équation dont les racines (après avoir mis pour x sa valeur trouvée ci-dessus) feront connoître les positions d'équilibre de la parabole.

En faisant $k = 0$, $h = \frac{3}{5}a$, on retombe dans la solution précédente, comme cela doit être.

Je ne multiplierai pas davantage ces applications. On procédera d'une manière analogue dans les autres cas, soit que les corps flottans soient homogènes ou non.



CHAPITRE XIII.

De la ſtabilité des corps flottans : des oſcillations ſimples que font ces corps dérangés de la ſituation d'équilibre.

(160.) TOUTES les ſituations d'équilibre d'un corps ont la même fin, celle d'établir l'immobilité de ce corps ; mais toutes ne lui procurent pas le même degré de conſiſtance ou de ſtabilité ; & ſi par quelque cauſe extérieure, l'équilibre vient à être dérangé, il eſt poſſible que le corps achève de trébucher, ou qu'il revienne à ſa première ſituation. Or, par rapport aux corps flottans, il exiſte en effet de telles cauſes extérieures : par exemple, l'impulſion du vent, l'agitation des lames, &c, qui tendent continuellement à troubler l'équilibre. Ce n'eſt donc pas aſſez que le centre de gravité du corps & celui de ſa partie ſubmergée, toujours regardée comme homogène, ſoient placés ſur une même ligne verticale : la poſition reſpective de ces deux points ſur cette ligne & leurs diſtances mutuelles, rendent l'état d'équilibre plus ou moins ferme, ainſi qu'on le verra bientôt.

Je ſuppoſerai toujours, pour parvenir à des réſultats ſimples & ſatisfaiſans, que les inclinaiſons d'où réſultent les dérangemens des ſituations d'équilibre, puiſſent être regardées comme très-petites ;

petites; j'examinerai les oscillations qu'elles produisent autour d'un axe *fixe;* j'appelle *simples* ces sortes d'oscillations, pour les distinguer de celles qui ont lieu autour de plusieurs axes, & dont il sera parlé dans le Chapitre suivant.

(161.) Avant d'entrer en matière, rappelons-nous ici un Théorème de mécanique dont nous allons faire usage. *Lorsqu'un corps est poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, ce point est mu comme s'il se trouvoit sur la direction de la force motrice; & le corps tourne autour de ce même point comme s'il étoit fixe.* D'où il suit que si un corps est poussé par deux forces parallèles & égales, de directions opposées, l'une passant par le centre de gravité, l'autre à une distance quelconque de ce point, le centre de gravité demeure immobile; mais, en vertu de la seconde force, le corps tourne autour du centre de gravité, comme si cette force existoit seule, & que le centre de gravité fût un point fixement arrêté. Voyez, pour la démonstration & pour un plus ample développement, mon *Traité de Mécanique,* articles 449, 450, &c.

(162.) PROBLÈME I. *Déterminer les conditions de la stabilité d'une figure plane verticale flottante sur un fluide!*

Il peut arriver que le centre de gravité de la figure entière soit placé plus bas que celui de sa partie submergée, soit parce que la figure n'est pas homogène, soit parce qu'elle est chargée de quelque corps étranger placé vers le fond; ou bien

que le premier centre ſoit placé plus haut que le ſecond.

Fig. 52. I.er CAS. Soit *(Figure 52)* ABK la figure propoſée, d'abord en équilibre; MN, la ligne de flottaiſon; G le centre de gravité de tout le poids de la figure; F celui de ſa partie ſubmergée que l'on regarde toujours comme homogène, ainſi que les autres parties de pareille nature. Les deux points G & F ſont placés ſur une même ligne verticale GZ, tant que l'équilibre ſubſiſte. Mais ſuppoſons que par quelque cauſe extérieure, la figure ABK s'incline un peu du côté de B, ou ce qui revient au même, que la figure demeurant immobile, la ligne de flottaiſon prenne la poſition mn; avec cette condition, que la nouvelle partie ſubmergée ſoit égale à la première MNK: qu'enſuite la figure ſoit abandonnée uniquement à l'action de la peſanteur & de la pouſſée verticale du fluide. On voit d'abord, par l'article précédent, qu'à cauſe de $mnK = MNK$, le centre de gravité G de la figure ne monte ni ne deſcend. La partie $NVmK$ étant commune aux deux ſurfaces mnK, MNK, les deux triangles NVn, MVm ſont égaux; c'eſt-à-dire, qu'en menant leurs hauteurs nf, mh, on a $\frac{NV \times nf}{2} = \frac{MV \times mh}{2}$. Or, $Vf : Vh :: nf : mh = \frac{nf \times Vh}{Vf}$; & comme l'inclinaiſon de la figure eſt ſuppoſée très-petite, on a ſenſiblement $Vf = VN$, $Vh = VM$;

ce qui donne $m\,h = \frac{n\,f \times VM}{VN}$. Subſtituant cette valeur de $m\,h$ dans l'équation $\frac{NV \times n\,f}{2} = \frac{MV \times m\,h}{2}$, on trouvera $(NV)^2 = (MV)^2$, ou $NV = MV$; d'où il ſuit que le point V où les deux lignes de flottaiſon ſe coupent, eſt le milieu de MN.

Ayant mené par le point I, centre de gravité de la partie ſubmergée mnK, la droite Ig perpendiculaire à la ſurface actuelle mn du fluide, & qui rencontre en g la verticale GZ, il eſt clair que comme le point g eſt placé au-deſſus du centre de gravité G de la figure, la pouſſée verticale actuelle du fluide qui s'exerce ſuivant Ig, & qui tend à faire tourner la figure autour d'un axe horizontal paſſant par le centre de gravité G, la ramène vers la ſituation d'équilibre, & que par conſéquent la figure a de la ſtabilité.

Par le centre de gravité G de la figure, celui F de la partie MNK primitivement ſubmergée, & ceux des triangles NVn, MVm, ſoient menées perpendiculairement à mn les droites Gi, DFd, yx, zu; de plus ſoit menée, par le point G, la droite GDE perpendiculaire aux parallèles DFd, EIg, & par conſéquent horizontale. Les ſurfaces mnK, MNK, NVn, MVm doivent être conſidérées ici comme exprimant des pouſſées verticales du fluide, & par conſéquent comme des forces verticales, dirigées de bas en haut, ayant le centre de gravité de leur ſyſtème, placé à la droite de GZ.

Maintenant, puisque $mnK + MVm = MNK + NVn$, les deux forces résultantes $(mnK + MVm)$, & $(MNK + NVn)$, seront en équilibre ; si de plus ces deux forces ont des momens égaux par rapport à la verticale Gi ; c'est-à-dire, si (en désignant les momens par la lettre initiale M placée au-devant des forces), on a l'équation $M.(mnK + MVm) = M.(MNK + NVn)$. Or la force $(mnK + MVm)$ étant composée des deux forces mnK, MVm, dont les directions sont placées de différens côtés par rapport à l'axe Gi, on a $M.(mnK + MVm) = M.mnK - M.MVm = mnK \times GE - \frac{MV \times mh}{2} \times iz$; & la force $(MNK + NVn)$ étant composée des deux forces MNK, NVn dont les directions tombent du même côté de l'axe, on a $M.(MNK + NVn) = M.MNK + M.NVn = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times ix$. On aura donc, $mnK \times GE - \frac{MV \times mh}{2} \times iz = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times ix$; ou, $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times (iz + ix) = MNK \times GD + \frac{MN \times nf}{4} \times \frac{2}{3} mn = MNK \times GD + \frac{(MN)^2 \times nf}{6}$; équation où $mnK \times GE$ exprime le moment

de la pouffée verticale actuelle du fluide, ou la mefure de la ftabilité. Il ne s'agit donc plus que de réduire cette équation à fa forme la plus fimple.

Lorfque la ligne de flottaifon a paffé de la pofition MN à la pofition mn, un point quelconque, par exemple le point Z, placé fur la verticale GZ, a décrit l'arc ZQ, tel que le côté GZ étant perpendiculaire à MN, le côté GQ eft perpendiculaire à mn, & tous les angles ZGQ, GFD, NVn, MVm font égaux. Donc, en nommant R le rayon donné GZ, Z l'arc ZQ, on aura $GD = FG \times \frac{Z}{R}$; $nf = NV \times \frac{Z}{R} = \frac{MN}{2} \times \frac{Z}{R}$: valeurs qui étant fubftituées dans l'équation $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{(MN)^2}{6} \times nf$, donnent $mnK \times GE = (MNK \times FG + \frac{(MN)^3}{12}) \times \frac{Z}{R}$.

IIe CAS. Le centre de gravité de la figure eft ici placé en G', au-deffus de celui F de la partie MNK primitivement fubmergée; je mène par ce point les droites $G'\,i'$, $D'\,G'\,E'$, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à mn; tout le refte eft d'ailleurs le même. On a toujours $M.(mnK + MVm) = M.(MNK + NVn)$. Or, $M.(mnK + MVm) = M.mnK - M.MVm = mnK \times G'E' - \frac{MV \times mh}{2} \times i'z$; & femblablement, $M.(MNK + NVn) = M.NVn$

$-M.MNK = \frac{NV \times nf}{2} \times i'x - MNK \times G'D'$.

On aura donc $mnK \times G'E' - \frac{MV \times mh}{2} \times i'z = \frac{MV \times nf}{2} \times i'x - MNK \times G'D'$; d'où l'on tire, en opérant comme ci-dessus, $mnK \times G'E' = (\frac{(MN)^3}{12} - FG' \times MNK) \times \frac{Z}{R}$.

En réunissant les deux cas à l'aide du double signe $\pm$, & nommant D la distance initiale du centre de gravité de la figure à celui de sa partie submergée, nous aurons, pour l'expression du moment de la poussée verticale actuelle de l'eau, $(\frac{(MN)^3}{12} \pm D \times MNK) \times \frac{Z}{R}$.

(163.) COROLLAIRE. On voit que dans le premier cas, la figure a toujours de la stabilité; & que toutes choses d'ailleurs égales, elle en a d'autant plus, que son centre de gravité est placé plus bas par rapport à celui de sa partie submergée, ou que la distance D de ces deux points est plus grande.

La figure a aussi de la stabilité dans le second cas, lorsque la quantité $\frac{(MN)^3}{12} - D \times MNK$ est positive; & d'autant plus, que cette quantité est plus grande. Mais si cette même expression étoit négative, la figure manqueroit de

ſtabilité; l'inclinaiſon primitive augmenteroit, & la figure finiroit par trébucher.

Si on avoit $\frac{(MN)^3}{12} - D \times MNK = 0$, (ce qui eſt toujours relatif au ſecond cas), la figure ſeroit indifférente à tourner dans un ſens ou dans un autre, & la plus petite force étrangère la feroit verſer. De plus, on auroit $MNK \times G'E' = 0$, ou $G'E' = 0$. D'où il ſuit qu'alors le centre de gravité de la figure tombe ſur le point g, interſection des deux perpendiculaires menées des centres de gravité des deux parties ſubmergées dans les deux poſitions de la figure, aux deux lignes de flottaiſon. Si l'on veut donc que cette figure ait de la ſtabilité, il faut que ſon centre de gravité ſoit toujours placé au-deſſous du point g.

Le point g eſt celui que M. Bouguer appelle *métacentre*, dans ſon *Traité du Navire*, & au-deſſous duquel doit tomber le centre de gravité du poids total d'un Vaiſſeau, pour que ce Vaiſſeau flottant à la mer ait de la ſtabilité.

(164.) PROBLÈME II. *Déterminer les mouvemens d'oſcillation que fera la figure dans l'hypothèſe du Problème précédent, & qu'elle ait de la ſtabilité!*

La figure ayant été inclinée de manière que le point donné Z a décrit l'arc ZQ, on doit conſidérer l'angle ZGQ comme donné, & comme celui d'inclinaiſon initiale. Maintenant, la figure

revient ſur ſes pas en vertu de la pouſſée verticale du fluide qui s'exerce ſuivant Gi ou $G'i'$; & dans un temps t, le point Q décrit un arc QR, tel que ſi l'on nomme z cet arc, S la ſomme des produits des élémens de toute la figure par les carrés de leurs diſtances au point G, on a, par les formules ordinaires des forces accélératrices (*Voyez mon Traité de Mécan. art. 451 & not. IV*),

$$\left(\frac{(MN)^3}{12} \pm D \times MNK\right) \times \frac{Z}{R} = \frac{S}{R} \times \frac{ddz}{dt^2}.$$

Or, cette équation eſt exactement de la même nature que celle d'un pendule oſcillant autour

Fig. 53. d'un point fixe. Car ſoit (*Fig. 53*), P un pendule ſuſpendu au point fixe G, autour duquel il oſcille : qu'on écarte ce pendule de la verticale GZ, de ſorte que l'angle ZGQ ſoit ici le même que dans la *Figure 52* : que le pendule partant de la poſition P, décrive dans le temps t l'arc Pp, & le point Q l'arc $QR = u$. On aura (en nommant s la ſomme des produits des élémens de P par les carrés de leurs diſtances au point G), $P \times GP \times \frac{Z}{R} = \frac{s}{R} \times \frac{ddu}{dt^2}$. D'où l'on voit que les mouvemens du pendule & de la figure propoſée ſont ſemblables; & ſi l'on veut que ces mouvemens ſoient exactement les mêmes, on n'aura qu'à égaler la valeur de $\frac{ddu}{dt^2}$ à celle de $\frac{ddz}{dt^2}$. Cette condition donne $\frac{P \times GP}{s}$

$= \frac{(MN)^3 \pm 12 D \times MNK}{12 S}$. Soit P un pendule *ſimple*, c'eſt-à-dire, un poids aſſez petit pour que toute ſa maſſe puiſſe être cenſée réunie en un même point ; & nommons L la longueur de ce pendule, ou la diſtance GP; on aura alors $s = P \times L^2$; & l'équation précédente nous donnera, $L = \frac{12 S}{(MN)^3 \pm 12 D \times MNK}$: expreſſion de la longueur d'un pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans le même temps que la figure propoſée. Ainſi, comme les oſcillations de ce pendule ſont *iſochrones* entr'elles, & ne ceſſent que par la réſiſtance de l'air ou des autres obſtacles qui peuvent anéantir le mouvement : les oſcillations de la figure ſeront auſſi iſochrones, & ne s'éteindront que par la réſiſtance qu'elle éprouve en frappant l'air & l'eau.

EXEMPLE. *La figure propoſée étant un triangle iſocèle homogène* ABK (Figure 54), *& la partie ſubmergée* MNK *étant auſſi un triangle iſocèle, on demande la valeur de* L. Fig. 54.

Ayant mené du ſommet K la perpendiculaire KCD ſur les baſes parallèles MN, AB, nommons MN, a; KC, c; AB, f; KD, g; p, la denſité ou la peſanteur ſpécifique du triangle; ϖ, la denſité ou la peſanteur ſpécifique du fluide : on aura d'abord $pfg = \varpi a c$, ou bien encore (à cauſe des triangles ſemblables ABK, MNK), $pf^2 = \varpi a^2$; $pg^2 = \varpi c^2$.

Le dénominateur de L a pour valeur relative au volume, $a^3 - 4ac(g - c)$. Mais, comme dans ces problèmes, il faut prendre les quantités relativement aux masses, cette valeur, qui se rapporte au triangle fluide MNK, doit être mulipliée par ϖ. Je la suppose positive, afin que la figure ait de la stabilité.

Pour trouver S, d'une manière fort simple, je cherche la somme des produits des élémens du triangle ABK, par les carrés de leurs distances au sommet K, & j'emploie ce Théorème général de mécanique (Voyez mon *Traité, articles 487 & 488*) : *la somme des produits des élémens d'un corps par les carrés de leurs distances à un axe qui ne passe pas par le centre de gravité, est égale à la somme des produits des mêmes élémens par les carrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité & parallèle au précédent, plus au produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.*

Soit donc VE une perpendiculaire quelconque à l'axe KD du triangle ABK; soit pris sur cette ligne l'élément Tt, & soit tirée TK. La somme des produits de tous les points de VE par les carrés de leurs distances au sommet K est $\int Tt \times (TK)^2 = \int Tt \times (EK)^2 + \int Tt \times (TE)^2 = VE \times (EK)^2 + \frac{(VE)^3}{3} = (EK)^3 \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right)$, à cause

de $VE = EK \times \frac{AD}{KD}$. Soit pris le point e infiniment près de E: la somme des produits de tous les points du triangle ABK, par les carrés de leur distance au sommet K, sera $2\int Ee \times (EK)^3 \times (\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}) = \frac{(KD)^4}{2} \times (\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}) = \frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}$. Maintenant, on a, par le Théorème cité, $\frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48} = S + \frac{fg}{2} \times \frac{4g^2}{9}$; d'où l'on tire $S = \frac{fg \times (3ff + 4gg)}{144}$. Cette valeur, qui est relative au volume & qui appartient au triangle solide ABK, doit être multipliée par p, afin d'avoir une quantité relative à la masse.

Donc enfin $L = \frac{pfg(3ff + 4gg)}{\omega[12a^3 - 48ac(g-c)]}$; ou $L = \frac{c(3ff + 4gg)}{12[a^2 - 4c(g-c)]}$.

(165.) SCHOLIE. Il est facile d'appliquer la même théorie à la recherche de la stabilité & des oscillations simples d'un corps solide flottant sur un fluide. Car soit ABK (*Fig.* 52), la coupe verticale du corps, perpendiculaire à l'axe de rotation qui y est représenté par le point G ou G'. Fig. 52. Que F représente l'axe horizontal, perpendiculaire à ABK, & passant par le centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide. Soit achevée d'ailleurs la construction comme dans

l'article 162. Il eſt évident que tout eſt le même dans les deux cas, avec cette différence qu'ici *MN* eſt le profil de la ſurface de flottaiſon du corps, & que *NVn*, *MVm* repréſentent deux onglets formés par la rotation des ſurfaces *NV*, *MV*, autour de l'axe horizontal déſigné par le point *V* dans le profil *ABK*. Ces deux onglets ſont néceſſairement égaux, parce qu'on ſuppoſe que le centre de gravité du corps ne monte ni ne deſcend. Ainſi l'axe horizontal, repréſenté par le point *V*, paſſe par le centre de gravité de la ſurface de flottaiſon *M N*; car l'égalité des deux onglets rend les diſtances des centres de gravité des deux ſurfaces *NV*, *MV*, à l'axe *V*, réciproquement proportionnelles à ces mêmes ſurfaces. D'après ces notions, & les principes établis, on trouvera les conditions de la ſtabilité du corps, & la longueur du pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans le même temps que ce corps.



CHAPITRE XIV.

Continuation du même sujet : Théorie générale des mouvemens très-petits, ascensionnels & oscillatoires des corps flottans.

(166.) M.rs Daniel Bernoulli, Euler & d'Alembert, ont résolu successivement & en différens temps les principales questions relatives à cette matière (Voyez les *Mémoires de l'Académie de Péterſbourg*, année 1739 ; la *Science Navale* de M. Euler ; la *Résistance des fluides* de M. d'Alembert, & le *tome I* de ses *Opuscules mathématiques).* J'ai aussi traité le même sujet dans mes deux Pièces *sur l'arrimage des Vaisseaux*, qui partagèrent les Prix de l'Académie des Sciences de Paris, en 1761 & 1765. Comme il appartient à l'Hydrostatique & à la Mécanique, il doit naturellement trouver encore place dans cet Ouvrage. Je commence par les principes de Mécanique & de Géométrie qui me seront nécessaires.

(167.) LEMME I. *Le centre de gravité ou de masse* G *d'un corps* (Fig. 55), *parcourant suivant une loi quelconque la droite* G X ; *si l'on mène par ce point & perpendiculairement à* G X *le plan* A D, *qui conserve toujours son parallélisme dans l'espace absolu ; qu'ensuite on suppose que chaque molécule du corps parcoure perpendiculairement & relativement au* Fig. 55.

plan AD *l'espace* pm: *on aura (en nommant* dP *chaque molécule élémentaire du corps*, p *l'espace parcouru* pm, dt *l'élément du temps*, φ *la force accélératrice suivant* pm), *on aura, dis-je, pour l'étendue entière du corps*, $\int p\,dP = 0$; & $\int \varphi\,dP = 0$, ou $\int \frac{dP.ddp}{dt^2} = 0$.

Les espaces *pm* étant simplement parcourus relativement au plan *AD*, nous pouvons toujours supposer que ce plan est en repos, en imaginant, pour cela, qu'on imprime au centre de gravité *G* un mouvement égal & contraire à celui qu'il a. Cela posé, il est clair 1.° que l'intégrale $\int p\,dP$, appliquée à tous les points de la masse du corps, exprime la différence qui se trouve entre la somme des produits des molécules de la partie *AED* du corps, multipliées chacune par le chemin qu'elle décrit de gauche à droite, perpendiculairement au plan *AD*, & la somme des produits des molécules de la partie *AFD*, multipliées chacune par le chemin qu'elle décrit de droite à gauche, perpendiculairement au même plan. Or, quand le centre de gravité est immobile, ou regardé comme tel, cette différence est égale à zéro. (*Voyez mon Traité de Mécanique, art. 403 & suiv.*).

2.° La quantité $\int \varphi\,dP$ ou $\int \frac{dP.ddp}{dt^2}$ est aussi zéro pour l'étendue entière du corps: car les forces φ étant, par exemple, positives pour la partie *AED* du corps, elles sont négatives pour la partie *AFD*;

& il y a autant de φdP pour l'une de ces parties que pour l'autre, puiſque le centre de gravité eſt ici regardé comme immobile. Donc on a, pour le corps entier, $\int \varphi dP = 0$, ou $\int \frac{dP.ddp}{dt^2} = 0$.

(168.) LEMME II. *Déterminer les conditions générales de l'équilibre entre les forces qui ſollicitent un corps en mouvement, & les réſiſtances qu'il leur oppoſe par ſon inertie ?*

I. Imaginons par un point fixe A (*Fig. 56*), trois axes AP, AC, AB perpendiculaires entre eux, & immobiles dans l'eſpace abſolu. On peut concevoir, pour fixer l'imagination, que les deux axes AP, AC ſont ſitués dans le plan de la planche, & que l'axe AB eſt perpendiculaire au même plan. Quel que puiſſe être le nombre, & quelles que puiſſent être les directions des forces appliquées au corps propoſé, il eſt clair que toutes ces forces pourront toujours, à chaque inſtant, être réduites à trois forces ſeulement, parallèles chacune à chacun des trois axes AP, AC, AB. Je ſuppoſe que ces forces ainſi réduites, ſont dirigées dans les ſens Ff, Ee, Dd, & qu'elles ſont exprimées par les lignes Ff, Ee, Dd. D'un point quelconque N du corps, ſoit abaiſſée NM perpendiculairement au plan CAP, & ſoit tirée MP perpendiculaire à AP. Soit décompoſée la réſiſtance que la molécule du corps, placée en N, oppoſe au mouvement par ſon inertie, en trois forces Np, Nm, Nn parallèles reſpectivement

Fig. 56.

aux trois axes AP, AC, AB. Pour que l'équilibre dont nous avons parlé ait lieu, il faut 1.° que la résultante ou la somme de chacune de ces forces élémentaires, soit égale à la force sollicitante qui lui correspond; 2.° que le moment provenant des premières forces, par rapport à chacun de nos trois axes, soit égal au moment correspondant qui provient des forces sollicitantes.

Soient Force $Ff = F$; Force $Ee = E$; Force $Dd = D$; $AP = q$; $PM = r$; $NM = s$; l'élément du temps $= dt$; chaque molécule du corps $= dP$; on aura d'abord ces trois équations $F = \int \frac{dPddq}{dt^2}$, $E = \int \frac{dPddr}{dt^2}$, $D = \int \frac{dPdds}{dt^2}$, qui sont relatives au mouvement de translation du corps.

Ayant supposé que les directions des forces F, E, D rencontrent les trois plans BAC, BAP, CAP aux points F, E, D respectivement; soient menées parallèlement à CA les droites FO, DK aux deux axes AB, AP; parallèlement à AB les droites FQ, ER aux deux axes AC, AP; parallèlement à AP les droites ES, DH aux deux axes AB, AC. Il est visible que le moment de la force F, par rapport à AP est nul; que le moment de cette force par rapport à AC est $F \times FQ$; que le moment de cette même force par rapport à AB est $F \times FO$; que le moment de la force E par rapport à AC est nul; que le moment de cette force

force par rapport à AB, eſt $E \times ES$; que le moment de cette même force par rapport à AP, eſt $E \times ER$; que le moment de la force D par rapport à AB, eſt nul; que le moment de cette force par rapport à AC, eſt $D \times DH$; que le moment de cette même force par rapport à AP, eſt $D \times DK$. De la combinaiſon de ces momens, réſulte pour chaque axe un moment unique, & en déſignant ce moment par la lettre initiale M, placée au-devant de l'axe, on a

$$M.AC = F \times FQ - D \times DH,$$
$$M.AB = F \times FO - E \times ES,$$
$$M.AP = E \times ER - D \times DK.$$

En analyſant de la même manière les momens de la réſiſtance de la molécule dP placée en N, par rapport aux trois axes AC, AB, AP, il réſultera,

$$M.AC = \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2},$$
$$M.AB = \int \frac{r\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,ddr}{dt^2},$$
$$M.AP = \int \frac{s\,dP\,ddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dP\,dds}{dt^2}.$$

Égalant chacun à chacun ces momens aux momens correſpondans des forces ſollicitantes, on aura ces trois autres équations, relatives aux mouvemens de rotation :

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{rdPddq}{dt^2} - \int \frac{qdPddr}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{sdPddr}{dt^2} - \int \frac{rdPdds}{dt^2}.$$

II. Par le centre de gravité G du corps, concevons trois nouveaux axes GV, GT, GY parallèles chacun à chacun des axes fixes AP, AC, AB. Ces axes GV, GT, GY font mobiles avec le centre de gravité ; mais chacun d'eux demeure toujours parallèle à lui-même. Soient par rapport au point G, les trois coordonnées GV, VL, LN qui répondent au point N. Ayant prolongé l'axe VG jufqu'à ce qu'il rencontre en Z le plan BAC, du point Z foient menées les droites ZI, ZX parallèles chacune à chacun des deux axes AC, AB. Confervons les dénominations précédentes, & fuppofons de plus $ZG = \pi$, $AX = \varpi$, $AI = \theta$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$, la diftance de la droite Ff au plan $TGV = \alpha$, la diftance de la même ligne au plan $YGV = \beta$, la diftance de la droite Ee au plan $YGT = \delta$, la diftance de la même ligne au plan $TGV = \gamma$, la diftance de la droite Dd au plan $YGT = \varphi$, la diftance de la même ligne au plan $YGV = \xi$. On aura évidemment $q = \pi + q'$, $r = \varpi + r'$, $s = \theta + s'$, $ddq = dd\pi + ddq'$, $ddr = dd\varpi + ddr'$, $dds = dd\theta + dds'$, $FQ = \theta + \alpha$, $FO = \varpi + \beta$, $ES = \pi + \delta$, $ER = \theta + \gamma$, $DH = \pi + \varphi$, $DK = \varpi + \xi$. Subftituant toutes ces valeurs dans les fix équations

fondamentales du numéro précédent, on aura 1.° les trois équations, $F = \int \frac{dPdd\Pi}{dt^2} + \int \frac{dPddq'}{dt^2}$, $E = \int \frac{dPdd\varpi}{dt^2} + \int \frac{dPddr'}{dt^2}$, $D = \int \frac{dPdd\theta}{dt^2} + \int \frac{dPdds'}{dt^2}$. Or, par la seconde partie du Lemme précédent, on a $\int \frac{dPddq'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dPddr'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dPdds'}{dt^2} = 0$. De plus, comme $dd\Pi$, $dd\varpi$, $dd\theta$, sont les mêmes pour tous les points du corps, on voit que nos trois premières équations deviennent $F = \frac{Pdd\Pi}{dt^2}$, $E = \frac{Pdd\varpi}{dt^2}$, $D = \frac{Pdd\theta}{dt^2}$.

2.° Pour savoir ce que deviennent les trois autres équations, considérons d'abord les parties correspondantes $F \times QF$ & $\int \frac{sdPddq}{dt^2}$ de la première. On a $F \times FQ = F \times \theta + F \times \alpha$; & $\int \frac{sdPddq}{dt^2} = \int \frac{(\theta + s')dP(dd\Pi + ddq')}{dt^2}$ $= \int \frac{\theta dPdd\Pi}{dt^2} + \int \frac{s'dPdd\Pi}{dt^2} + \int \frac{\theta dPddq'}{dt^2}$ $+ \int \frac{s'dPddq'}{dt^2} = \frac{P\theta dd\Pi}{dt^2} + \frac{dd\Pi}{dt^2} \int s'dP$ $+ \theta \int \frac{dPddq'}{dt^2} + \int \frac{s'dPddq'}{dt^2}$, quantité qui devient $F \times \theta + \int \frac{s'dPddq'}{dt^2}$, en mettant pour $\frac{P\theta dd\Pi}{dt^2}$ sa valeur $F \times \theta$, & observant que par la première partie du Lemme précédent, $\int s'dP = 0$,

& par la 2.^{e} $\int \frac{dPddq'}{dt^2} = 0$. Si l'on fait les mêmes opérations ſur les autres parties correſpondantes de nos équations, & qu'on efface les termes qui ſe détruiſent, on trouvera que ces équations ſe réduiſent enfin aux ſuivantes :

$$F \times \alpha - D \times \varphi = \int \frac{s' dPddq'}{dt^2} - \int \frac{q' dPdds'}{dt^2},$$

$$F \times \beta - E \times \delta = \int \frac{r' dPddq'}{dt^2} - \int \frac{q' dPddr'}{dt^2},$$

$$E \times \gamma - D \times \xi = \int \frac{s' dPddr'}{dt^2} - \int \frac{r' dPdds'}{dt^2}.$$

III. Quel que puiſſe être le mouvement de chaque point *N* du corps propoſé, relativement au centre de gravité, nous pouvons toujours concevoir qu'il eſt produit par la rotation du corps autour des trois axes *GY, GV, GT.* Suppoſons Fig. 57. (*Fig. 57*), qu'au premier inſtant le point *N* ſoit en *H*; & ſoient *GE, EF, FH* les coordonnées correſpondantes. Imaginons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe *GY*, la droite *FH*, en tournant parallèlement à elle-même, prenne la poſition *SK*; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe *GV*, le point *K* parvienne en *R*; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe *GT*, le point *R* parvienne en *N*. Les coordonnées *NL, LV, GV* ſont ici les mêmes que dans la figure précédente. Soient tirées les droites *GF, GS, DK.* Du point *R*, ſoit abaiſſée *RO* perpendiculaire ſur le plan *TGV*; & par le point *O* ſoit menée perpen-

diculairement à GT la droite XO qui paſſe néceſſairement par le point L. Soient tirées les droites XR, XN. Enfin des points D & X, ſoient élevées perpendiculairement au plan TGV, ou parallèlement à l'axe GY, les droites DZ, XP. Suppoſons $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$, l'angle de rotation autour de l'axe $GY = x$, l'angle de rotation autour de l'axe $GV = y$, l'angle de rotation autour de l'axe $GT = z$.

Puiſque l'angle DGS eſt la ſomme de l'angle EGF & de l'angle FGS (x), on aura $DS = GF \times \text{ſin.}\,DGS = \lambda\ \text{coſ.}\,x + \psi\ \text{ſin.}\,x$; $GD = GF \times \text{coſ.}\,DGS = \psi\ \text{coſ.}\,x - \lambda\ \text{ſin.}\,x$.

L'angle RDZ ou ORD étant la ſomme de l'angle KDZ ou DKS & de l'angle $RDK\,(y)$, on aura $DO = DK.\ \text{ſin.}\,RDZ = DS.\ \text{coſ.}\,y + SK.\ \text{ſin.}\,y = \lambda\ \text{coſ.}\,x\ \text{coſ.}\,y + \psi\ \text{ſin.}\,x\ \text{coſ.}\,y + \mu\ \text{ſin.}\,y$; $RO = DK \times \text{coſ.}\,RDZ = SK \times \text{coſ.}\,y - DS \times \text{ſin.}\,y = \mu\ \text{coſ.}\,y - \lambda\ \text{coſ.}\,x\ \text{ſin.}\,y - \psi\ \text{ſin.}\,x\ \text{ſin.}\,y$.

L'angle NXP ou XNL étant la différence de l'angle RXP ou XRO & de l'angle $RXN\,(z)$, on aura $XL = XR \times \text{ſin.}\,NXP = XO \times \text{coſ.}\,z - RO \times \text{ſin.}\,z = \psi\ \text{coſ.}\,x\ \text{coſ.}\,z - \lambda\ \text{ſin.}\,x\ \text{coſ.}\,z - \mu\ \text{coſ.}\,y\ \text{ſin.}\,z + \lambda\ \text{coſ.}\,x\ \text{ſin.}\,y\ \text{ſin.}\,z + \psi\ \text{ſin.}\,x\ \text{ſin.}\,y\ \text{ſin.}\,z$; $LN = XR \times \text{coſ.}\,NXP = RO \times \text{coſ.}\,z + XO \times \text{ſin.}\,z = \mu\ \text{coſ.}\,y\ \text{coſ.}\,z - \lambda\ \text{coſ.}\,x\ \text{ſin.}\,y\ \text{coſ.}\,z - \psi\ \text{ſin.}\,x\ \text{ſin.}\,y\ \text{coſ.}\,z + \psi\ \text{coſ.}\,x\ \text{ſin.}\,z - \lambda\ \text{ſin.}\,x\ \text{ſin.}\,z$.

D'où il suit qu'à cause de $XL = GV = q'$, $DO = VL = r'$, $LN = s'$, on aura

$q' = \psi$ cof. x cof. z — λ fin. x cof. z — μ cof. y fin. z + λ cof. x fin. y fin. z + ψ fin. x fin. y fin. z;

$r' = \lambda$ cof. x cof. y + ψ fin. x cof. y + μ fin. y;

$s' = \mu$ cof. y cof. z — λ cof. x fin. y cof. z — ψ fin. x fin. y cof. z + ψ cof. x fin. z — λ fin. x fin. z.

Ainsi on pourra chaffer q', r', s', ddq', ddr', dds' des équations précédentes. Il eft à remarquer au fujet des trois quantités $\int s'dPddq' - \int q'dPdds'$, $\int r'dPddq' - \int q'dPddr'$, $\int s'dPddr' - \int r'dPdds'$, qui font les mêmes refpectivement que $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr' - r'ds')$, il eft à remarquer, dis-je, que dans les deux différentiations fucceffives qu'il faut faire d'abord pour trouver $d(s'dq' - q'ds')$, $d(r'dq' - q'dr')$, $d(s'dr' - r'ds')$, les angles x, y, z font variables, & les quantités ψ, λ, μ font conftantes; mais que dans l'intégration qui fuit, il n'y a que les quatre quantités dP, ψ, λ, μ qui doivent être regardées comme variables, & que les autres doivent être écrites au-devant du figne d'intégration, parce qu'alors les intégrales expriment les mouvemens des parties du corps.

Ces formules générales fervent à déterminer les mouvemens d'un corps quelconque, animé de forces quelconques. En voici l'application à notre fujet.

(169.) PROBLÈME. *Déterminer les mouvemens que doit prendre un corps flottant, lorsqu'ayant été d'abord un peu dérangé de la situation d'équilibre, par une cause quelconque, il est ensuite uniquement abandonné à l'action de sa pesanteur & de la poussée verticale du fluide !*

Soient, au premier instant des mouvemens qu'il s'agit de déterminer, *ABK* (*Fig. 58*) une section verticale du corps flottant, par un plan qui passe par son centre de gravité *G*, & qui contient l'axe vertical *GY* & l'axe horizontal *GV*; *HPK* (*Fig. 59*) une autre section verticale, perpendiculaire à la première, qui passe aussi par le centre de gravité *G*, & qui contient l'axe vertical *GY* & l'axe horizonral *GT*; *MENI* (*Fig. 60*) la section horizontale du corps, faite à fleur d'eau, & dans laquelle *MN* est la section commune des deux plans *MENI*, *ABK*; & *EI* est la section commune des deux plans *MENI*, *HPK*. Les trois axes *GY*, *GV*, *GT* sont ici les mêmes que dans les *Figures 56* & *57*. Faisons passer, pour plus de simplicité dans le calcul, le plan *ABK* (*Fig. 58*), par le centre de gravité *L* du plan de flottaison *MENI* (*Fig. 60*) : supposition toujours permise, puisque la position des axes dans l'espace est arbitraire. Le centre de gravité *F* (*Fig. 61*) de la partie submergée au premier instant, étant supposé placé à une certaine distance (fort petite) de la verticale *GY*, menons par ce centre *F* & par la verticale *GY* le plan

Fig. 58, 59, 60 & 61.

CDK qui coupe le plan *MENI* ſuivant *RS*. Du point *F*, ſoient menées les droites *FQ*, *FF'*, l'une perpendiculaire à *GY*, l'autre à *RS*. Soit auſſi menée par le point *F'* (*Fig.* 60), *F'f* perpendiculaire à *MN*. Ici & dans la ſuite, les quatre *Figures* 58, 59, 60 & 61, doivent toujours être combinées enſemble ; il faut ſe bien repréſenter leur poſition reſpective, & chercher dans chacune d'elles les lignes, les ſurfaces & les ſolides qu'on aura beſoin de déſigner.

Cela poſé, il eſt clair que le corps en queſtion étant ſoumis ſeulement à l'effort de ſa peſanteur, & de la pouſſée verticale du fluide, les forces que nous avons nommées ci-deſſus *F* & *E* ſont ici nulles, & qu'il ne reſte que la ſeule force *D* qui eſt la différence de la pouſſée verticale du fluide & de la peſanteur du corps ; que par conſéquent ce corps ne peut avoir aucun mouvement progreſſif horizontal, ou que $\Pi = 0$, $\varpi = 0$; mais qu'en vertu de la force *D*, ſon centre de gravité peut monter ou deſcendre (ici nous ſuppoſons qu'il monte d'une quantité égale à *Oq*), tandis que le corps tourne autour des trois axes *GY*, *GV*, *GT*. De plus, en conſidérant la diſpoſition du centre de gravité de la partie ſubmergée, on voit qu'en vertu de la rotation autour de l'axe *GT*, le point *B* s'élève, le point *A* s'abaiſſe, & la ſection *MN* du corps prend la poſition *mn*; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe *GV*, le point *H* s'élève, le point *P* s'abaiſſe, & la ſection

EI du corps prend la poſition ei. Or, durant le temps t de tous ces mouvemens, il ſort de l'eau un priſme ayant $MENI$ pour baſe & Oq ou Oq' pour hauteur, plus les deux onglets nqc, $eq'r$; au contraire, il entre dans l'eau les deux onglets mqd, $tq'i$: ſur quoi il faut obſerver que les deux onglets $eq'r$, $tq'i$ ſont égaux, comme étant produits par la rotation des eſpaces MNE, MNI, autour de l'axe mn ou MN qui paſſe par le centre de gravité de leur ſyſtème. Ce ſont-là les ſeuls changemens qui arrivent dans la partie ſubmergée du corps; & il eſt viſible que le mouvement autour de l'axe vertical GY, n'y contribue en rien. Suppoſons que les verticales élevées par les centres de gravité des quatre onglets nqc, mqd, $eq'r$, $tq'i$, rencontrent le plan $MENI$, aux points g, z, l, s, reſpectivement ; & ſoient menées les droites gh, zk, lp, su perpendiculaires à MN. Nommons :

La peſanteur ſpécifique du corps.	p,
Celle du fluide.	ϖ,
Le volume entier du corps.	M,
Celui de la partie plongée au premier inſtant. . . .	N,
L'aire $MENI$.	a^2,
La diſtance OL de ſon centre de gravité L au point O.	b,
La hauteur GQ (*Fig. 61*), du centre de gravité de la partie ſubmergée, au-deſſus de celui G du corps.	h,
Of (*Fig. 60*).	δ,
$F'f$.	δ',
Oq (*Fig. 58*).	θ,

L'angle de rotation autour de l'axe verticale GY.	x,
L'angle de rotation autour de l'axe horizontal GV.	y,
L'angle de rotation autour de l'axe horizontal GT.	z,
L'onglet $eq'r$ ou $tq'i$.	$i^3 y$,
Op.	k,
lp.	k',
Ou.	n,
su.	n',
L'onglet nqc.	$c^3 z$,
Oh.	e,
gh.	e',
L'onglet mqd.	$f^3 z$,
Ok.	g,
zk.	g'.

Je n'ai pas besoin d'avertir que les quantités $a, b, c, f, g, g', h, i, k, k', e, e', \delta, \delta'$ sont données ou déterminables par la Géométrie.

On aura d'abord, $D = \varpi \times (N - MENI \times Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - p \times M = \varpi (N - MENI \times Oq - nqc + mqd) - p \times M = \varpi N - \varpi a^2 \theta - \varpi c^3 z + \varpi f^3 z - pM$.

De plus, si l'on considère qu'en vertu de l'inclinaison du corps vers A, le centre de gravité F s'approche du plan HPK de la quantité hz, ou que Of devient $\delta - hz$, & qu'en vertu de l'inclinaison vers P, le même point F s'approche du plan ABK de la quantité hy ou que $F'f$ devient $\delta' - hy$; on verra sans peine qu'après le temps t le moment de la poussée verticale du fluide, par rapport à l'axe GT, ou $D \times \varphi = \varpi [N(\delta - hz) + a^2 b \theta - c^3 e z - f^3 g z$

$- i^{3} ky - i^{3} ny]$, & que le moment de la même force, par rapport à l'axe GV, ou $D \times \xi = - \varpi [N(\delta' - hy) + c^{3} e' z + f^{3} g' z - i^{3} k' y - i^{3} n' y]$.

Reste à trouver les valeurs de $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr' - r'ds')$ en fonctions des angles x, y, z. Or, comme les oscillations sont censées fort petites, il est clair que dans les valeurs de q', r', s' trouvées ci-dessus, on pourra négliger tous les termes qui contiennent plus d'un sinus, supposer dans les termes qui contiennent un sinus & un cosinus ou deux cosinus, chaque cosinus $= 1$, & prendre l'angle pour le sinus. Donc

$$s'dq' - q'ds' = - \lambda\mu dx - (\mu^{2} + \psi^{2}) dz + \psi\lambda dy,$$
$$r'dq' - q'dr' = - (\psi^{2} + \lambda^{2}) dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy,$$
$$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^{2} + \mu^{2}) dy - \psi\lambda dz;$$
$$\int dPd(s'dq' - q'ds') = - pddx \int \lambda\mu dM - pddz \int (\mu^{2} + \psi^{2}) dM + pddy \int \psi\lambda dM,$$
$$\int dPd(r'dq' - q'dr') = - pddx \int (\psi^{2} + \lambda^{2}) dM - pddz \int \lambda\mu dM - pddy \int \psi\mu dM,$$
$$\int dPd(s'dr' - r'ds') = pddx \int \psi\mu dM + pddy \int (\lambda^{2} + \mu^{2}) dM - pddz \int \psi\lambda dM:$$

quantités dans lesquelles les parties comprises sous le signe d'intégration sont données par la figure du corps. Nous ferons pour abréger, $\int \lambda\mu dM = A$, $\int (\mu^{2} + \psi^{2}) dM = B$, $\int \psi\lambda dM = C$,

$\int (\psi^2 + \lambda^2)\, dM = G$, $\int \psi \mu\, dM = H$,
$\int (\lambda^2 + \mu^2)\, dM = K$.

Il résulte de tout ce qui précède, qu'on aura les quatre équations suivantes qui expriment en général toutes les oscillations (très-petites), dont un corps flottant peut être affecté :

(A) $[\varpi N - \varpi a^2 \theta - (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - p M]\, dt^2 = p M dd\theta$,

(B) $- \varpi [N(\delta - h z) + a^2 b \theta - (c^3 e + f^3 g) z - (i^3 k + i^3 n) y]\, dt^2 = - p A ddx - p B ddz + p C ddy$,

(C) $p G ddx + p A ddz + p H ddy = 0$,

(D) $\varpi [N(\delta' - h y) + (c^3 e' + f^3 g') z - (i^3 k' + i^3 n') y]\, dt^2 = p H ddx + p K ddy - p C ddz$.

Comme les quatre variables θ, x, y, z ne sont qu'au premier degré dans les équations (A), (B), (C), (D), ces équations combinées ensemble s'intègrent facilement par les méthodes que M. d'Alembert a données dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1748 & 1750. Je ne ferai pas ici en général ce calcul, qui n'a d'autre difficulté que sa longueur. Je me borne à l'examen de quelques cas particuliers.

(170.) COROLLAIRE I. Supposons, comme il arrive dans les oscillations des vaisseaux flottans à la mer, que le plan ABK partage le corps flottant en deux parties exactement égales, & que les centres de gravité des deux onglets $eq'r$, $iq't$ se trouvent, du moins à peu près dans le plan

HPK, on aura rigoureusement $e' = 0$, $g' = 0$; & dans l'équation (B) on pourra négliger les termes $i^3 ky$, $i^3 ny$, comme incomparablement plus petits que les autres. De plus, on aura, par la propriété du centre de gravité, $\int \lambda \mu \, dM = 0$, $\int \psi \lambda \, dM = 0$. Ainsi nos équations se changeront en celles-ci,

$$[\varpi N - \varpi a^2 \theta - (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - pM] \, dt^2 = pM dd\theta, \quad \text{(E)}$$

$$\varpi [N(\delta - hz) + a^2 b \theta - (c^3 e + f^3 g) z] \, dt^2 = pB ddz, \quad \text{(F)}$$

$$G ddx + H ddy = 0, \quad \text{(G)}$$

$$\varpi [N(\delta' - hy) - 2 i^3 k' y] \, dt^2 = pH ddx + pK ddy, \quad \text{(H)}$$

résultats qui reviennent à ceux que j'ai trouvés un peu différemment dans les deux pièces citées.

Comme on peut mettre dans la dernière équation, à la place de $pHddx$ sa valeur $-\frac{pH^2 ddy}{G}$, & que H est une quantité dont le carré, tout au moins, peut être traité comme infiniment petit du premier ordre, on pourra négliger le terme $-\frac{pH^2 ddy}{G}$. Soient pour abréger le calcul,

$$\frac{\varpi N - pM}{pM} = I, \quad \frac{\varpi a^2}{pM} = L, \quad \frac{\varpi c^3 - \varpi f^3}{pM} = P,$$

$$\frac{\varpi N \delta}{pB} = Q, \quad -\frac{\varpi a^2 b}{pB} = R,$$

$$\frac{\varpi (Nh + c^3 e + f^3 g)}{pB} = S, \quad \frac{\varpi N \delta'}{pK} = T,$$

$\frac{\varpi (N h + 2 i^3 k')}{p K} = V$. Nos quatre équations deviennent

$$d d \theta - I d t^2 + L \theta d t^2 + P z d t^2 = 0,$$
$$d d z - Q d t^2 + R \theta d t^2 + S z d t^2 = 0,$$
$$G d d x + H d d y = 0,$$
$$d d y - T d t^2 + V y d t^2 = 0.$$

Les deux premières combinées enſemble s'intègrent de la manière ſuivante, par l'ingénieuſe méthode de M. d'Alembert. Ayant multiplié la première par un coéfficient indéterminé v, je l'ajoute à la ſeconde ; ce qui donne $v d d \theta - v I d t^2 + v L \theta d t^2 + v P z d t^2 + d d z - Q d t^2 + R \theta d t^2 + S z d t^2 = 0$. Enſuite je ſuppoſe que l'on ait l'équation $v L \theta + v P z + R \theta + S z = \epsilon (v \theta + z)$, ϵ étant un coéfficient indéterminé ; ce qui donne, en comparant enſemble les termes de même eſpèce, ces deux équations $v L + R = \epsilon v$, $v P + S = \epsilon$. D'où l'on tire deux valeurs de v que je nomme v & v', & deux valeurs de ϵ que je nomme ϵ & ϵ'. Soient $v \theta + z = s$, $v' \theta + z = s'$: l'équation $v d d \theta - v I d t^2 +$ &c. donnera ces deux autres

$$d d s + \epsilon s d t^2 - (v I + Q) d t^2 = 0,$$
$$d d s' + \epsilon' s' d t^2 - (v' I + Q) d t^2 = 0.$$

Multipliant la première par $d s$, la ſeconde par $d s'$, enſuite intégrant deux fois, on trouvera facilement

$$s = \left(\frac{v I + Q}{\epsilon}\right) \times (1 - \text{coſ.}\, t \sqrt{\epsilon}),$$

$$s' = \left(\frac{\nu' I + Q}{\iota'}\right) \times (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\iota'});$$

& par conféquent

$$\theta = \frac{(\nu I + Q)}{\iota(\nu - \nu')} \cdot (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\iota})$$

$$- \frac{(\nu' I + Q)}{\iota'(\nu - \nu')} \cdot (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\iota'}),$$

$$\zeta = \frac{(\nu' I + Q)\nu}{\iota'(\nu - \nu')} (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\iota'})$$

$$- \frac{(\nu I + Q)\nu'}{\iota(\nu - \nu')} (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{\iota}).$$

Ces valeurs de θ & de ζ font complètes, parce qu'on doit avoir $\theta = 0$ & $\zeta = 0$, lorfque $t = 0$, & que $t = 0$ donne cof. $t\sqrt{\iota} = 1$, cof. $t\sqrt{\iota'} = 1$.

Quant aux deux dernières équations fondamentales $Gddx + Hddy = 0$, $ddy - Tdt^2 + Vydt^2 = 0$, elles s'intègrent tout de fuite, & donnent :

$$y = \frac{T}{V} (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{V}),$$

$$x = - \frac{H.T}{G.V} (1 - \text{cof.}\, t\sqrt{V}).$$

(171.) COROLLAIRE II. Il eft évident, par les expreffions que nous venons de trouver pour θ & ζ, que fi ι & ι' font des quantités réelles & pofitives, le mouvement θ du centre de gravité & celui de rotation ζ autour de l'axe GT font très-petits, comme on les a fuppofés, & que par conféquent le corps fera des ofcillations qui ne l'expoferont pas à verfer. Mais fi ι & ι' étoient

des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de θ & de z dépendroient des logarithmes, & qu'ainsi t augmentant, elles augmenteroient. D'où il suit que les oscillations ne seroient plus infiniment petites, comme on les a supposées, & que le corps n'auroit pas de stabilité, ou seroit exposé à verser. On trouve pareillement que les valeurs de θ & de z contiennent des logarithmes, lorsque ν & ν', & par conséquent aussi ι & ι' sont imaginaires, ou lorsque ν & ν' étant des quantités réelles, ces deux quantités sont égales entr'elles. Mais ces deux derniers cas sont purement géométriques, & n'ont pas lieu dans notre problème.

Pareillement, les valeurs de y & de x seront infiniment petites, lorsque V sera une quantité positive; mais si V étoit une quantité négative, le corps n'auroit pas de stabilité par rapport aux deux axes GV, GY, & finiroit par verser.

On voit que les conditions de stabilité dont je viens de parler, dépendent de la position du centre de gravité du corps entier, par rapport à celui de sa partie submergée. Toutes les fois que le premier point est placé plus bas que le second, le corps flottant a de la stabilité en tout sens; mais si au contraire le premier point est placé plus haut que le second, ce corps pourra manquer de stabilité; nos formules font connoître la plus grande hauteur qu'on puisse mettre alors entre les deux centres de gravité. Cette manière de

déterminer

déterminer les *métacentres* eſt générale & fort ſimple.

(172.) COROLLAIRE III. Lorſque la verticale GY paſſe par le centre de gravité du plan de flottaiſon, & que les deux plans ABK, HPK partagent chacun le corps en deux parties égales & ſemblables, les deux onglets nqc, mqd ſont égaux, de même que les deux onglets $eq'r$, $iq't$. De plus, on a $\int x\mu\, dM$ ou $A = 0$, $\int \psi\lambda\, dM$ ou $C = 0$, $\int \psi\mu\, dM$ ou $H = 0$. Par conſéquent, ſi l'on ſuppoſe qu'au premier inſtant le poids du fluide déplacé ſoit égal au poids abſolu du corps, ou qu'on ait $N = pM$, le corps ne pourra ni monter ni deſcendre, & on aura $\theta = 0$. On aura auſſi $x = 0$, abſtraction faite de tout mouvement de rotation horizontale, primitivement imprimé. Nos quatre équations fondamentales de l'article 170 ſe réduiront donc aux deux ſuivantes,

$$ddz - Q\,dt^2 + Sz\,dt^2 = 0,$$
$$ddy - T\,dt^2 + Vy\,dt^2 = 0,$$

leſquelles donnent

$$z = \frac{Q}{S}(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{S}),$$
$$y = \frac{T}{V}(1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{V}).$$

Le corps propoſé a donc alors ſimplement deux mouvemens de rotation qui ſe font autour des deux axes horizontaux GT, GV paſſant par ſon

centre de gravité & perpendiculaires entr'eux. Ces oſcillations demeurent toujours fort petites, & par conſéquent le corps a de la ſtabilité, lorſque S & V ſont des quantités poſitives. Elles ſont abſolument de même eſpèce que celles d'un pendule qui va & vient; & en nommant Z, Y leurs amplitudes totales, on a évidemment $Z = \frac{2Q}{S}$, $Y = \frac{2T}{V}$.

A l'égard des temps employés à parcourir les angles Z, Y, ils ſont faciles à trouver. Car pour que z devienne Z, & que y devienne Y, il faut que l'on ait $1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{S} = 2$, $1 - \text{coſ.}\, t\sqrt{V} = 2$, ou bien $\text{coſ.}\, t\sqrt{S} = -1$, $\text{coſ.}\, t\sqrt{V} = -1$, & par conſéquent $t = \frac{180°}{\sqrt{S}}$, $t = \frac{180°}{\sqrt{V}}$. Subſtituant à la place de S & V leurs valeurs, on trouvera que le temps de chaque oſcillation Z, eſt exprimé par $180° \times \sqrt{[\frac{\int p(\psi^2 + \mu^2)\, dM}{\varpi(Nh + 2c^3e)}]}$, & que de même celui de chaque oſcillation Y, eſt exprimé par $180° \times \sqrt{[\frac{\int p(\lambda^2 + \mu^2)\, dM}{\varpi(Nh + 2i^3k')}]}$. Or, comme ces valeurs ne contienent point les diſtances initiales δ, δ' du centre de gravité de la partie ſubmergée aux plans HPK, ABK, il eſt clair que les oſcillations ſeront iſochrones dans chaque eſpèce, quelles que ſoient leurs amplitudes totales, pourvu néanmoins qu'elles ſoient toujours fort petites. Le corps oſcille donc à la manière des

pendules. Pour déterminer les longueurs des pendules ſynchrones aux oſcillations de ce corps, on remarquera que ſi un pendule ſimple, dont la longueur eſt L, eſt diſtant, au premier inſtant, de la verticale, de la quantité δ, fort petite, & décrit dans le temps t l'angle u qui a L pour rayon; l'équation de ce pendule eſt $ddu = \frac{(\delta - u)\,dt^2}{L}$, ou bien $u = \delta\,(1 - \text{coſ.}\,\frac{t}{\sqrt{L}})$. D'où l'on tire le temps d'une oſcillation entière $= 180° \times \sqrt{L}$. Ainſi, la longueur du pendule ſynchrone aux oſcillations Z eſt donnée par l'équation

$$L = \frac{\int p\,(\varphi^2 + \mu^2)\,dM}{\varpi\,(Nh + 2\iota^3 e)},$$

& celle du pendule ſynchrone aux oſcillations Y eſt donnée par l'équation

$$L' = \frac{\int p\,(\lambda^2 + \mu^2)\,dM}{\varpi\,(Nh + 2i^3 k')}.$$

(173.) SCHOLIE. Je terminerai ces recherches par l'application des formules de l'article précédent à un exemple particulier.

Soit le corps flottant (*Fig. 62*) un demi-ſphéroïde elliptique $AKBPAH$ homogène, produit par la demi-révolution de la demi-ellipſe AHB autour de ſon axe AB. Le plan $AHBP$ qui ſert de baſe au demi-ſphéroïde, & le plan de flottaiſon $MENI$, ſont parallèles & diſtans l'un de l'autre d'une quantité donnée ZO. Le point G eſt le centre de gravité du demi-ſphéroïde, & les Fig. 62.

trois axes GY, GV, GT, font les mêmes que ci-dessus. ABK est la section longitudinale du corps, HPK la section latitudinale. Il s'agit de trouver ici les valeurs des quantités N, h, $c^3 e$, $i^3 k'$, $\int(\psi^2 + \mu^2)\, dM$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)\, dM$. Cherchons-les par ordre.

1.° Pour éviter la multiplicité & la confusion des lignes, considérons $MENI$ comme une section indéterminée du demi-ellipsoïde. Ayant mené à l'axe MN de la courbe $MENI$ l'ordonnée quelconque CD, qu'on fasse passer par cette ordonnée le plan vertical $SCXC'L$ qui coupe le plan vertical ABK suivant XR. On voit que CD sera aussi l'ordonnée d'un cercle dont RX est le rayon. Ainsi $(CD)^2 = (XR)^2 - (DR)^2$. Mais par la propriété de l'ellipse, $(XR)^2 = [(BZ)^2 - (RZ)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2} = [(BZ)^2 - (DO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$, & $(DR)^2 = [(BZ)^2 - (NO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$. Donc $(CD)^2 = [(NO)^2 - (DO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$. D'où l'on voit que la courbe $MENI$ est une ellipse semblable à l'ellipse $AHBP$. Soient $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, le rapport de la circonférence au diamètre $= n$. On aura $AHBP = nab$, $MENI = nab \times \frac{(NO)^2}{(BZ)^2}$.

$= \frac{na(bb-xx)}{b}$. Donc $dN = -\frac{nadx(bb-xx)}{b}$ & $N = \frac{na}{b}(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3})$, en complétant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $x = b$. Faisons $x = ZO = f$, ligne connue; nous aurons la quantité que nous cherchons $N = \frac{na}{b}(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3})$. En supposant $f = 0$, N devient ce que nous avons appelé M; & on a par conséquent $M = \frac{2nab^2}{3}$.

2.° Le moment élémentaire du solide *MKNIME*, par rapport au point Z, est $-\frac{naxdx(bb-xx)}{b}$, dont l'intégrale complète est $\frac{na}{b}(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4})$. Faisons d'abord $x = 0$, & divisons par M ou $\frac{2nab^2}{3}$; nous aurons la distance du centre de gravité du solide $AKBPAH$ au point Z, $= \frac{3}{8}b$. Faisons ensuite $x = f$, & divisons par N ou $\frac{na}{b}(\frac{2}{3}b^3 - b^2f + \frac{f^3}{3})$; nous aurons la distance du centre de gravité de la partie submergée, au point Z, $= \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$. Ainsi, $h = \frac{3}{8}b - \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$.

3.° Imaginons que l'onglet formé par la rotation

de l'aire EIN autour de EI, eſt compoſé d'une infinité de triangles prs perpendiculaire à l'axe EI. En faiſant, pour un moment, $OI = l$, $ON = m$, $Op = u$; il eſt clair que $pr = \frac{m}{l} \sqrt{[ll - uu]}$, & que le moment élémentaire du demi-onglet $= \frac{m^2}{l^2} (ll - uu) \times \frac{m \sqrt{[ll - uu]}}{3l} \times du \times z$ $= \frac{m^3 z}{3 l^3} \times du (ll - uu)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale eſt $\frac{m^3 z}{3 l^3} \times \left(\frac{u (ll - uu)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4} l^2 \int du \sqrt{[ll - uu]} \right)$. Faiſant $u = l$, conſidérant qu'alors $\int du \sqrt{[ll - uu]}$ repréſente l'aire d'un quart-de-cercle dont le rayon eſt l, & doublant l'intégrale, on trouvera que la quantité exprimée par $c^3 e$, $= \frac{n m^3 l}{8}$. Mettons pour m ſa valeur $\frac{n}{b} \sqrt{[bb - ff]}$, pour l ſa valeur $\sqrt{[bb - ff]}$; nous aurons $c^3 e = \frac{n a^3 (bb - ff)^2}{8 b^3}$.

4.° On trouvera de la même manière que la quantité exprimée par $i^3 k'$, vaut $\frac{na(bb - ff)^2}{8b}$.

5.° Pour déterminer $\int (\psi^2 + \mu^2)\, dM$ ou la ſomme des produits des particules du demi-ellipſoïde par les carrés de leurs diſtances à l'axe latitudinal GT, je conſidère, ainſi que je l'ai déjà fait, $MENI$ comme une ſection indéterminée du demi-ſphéroïde. Sur l'ordonnée CD à l'axe MN, je prends les deux points quelconques infiniment voiſins f, u. Ayant ſuppoſé $ZO = x$, OM ou

$ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, & nous rappelant que $ZG = -\frac{3}{8}b$, on verra sans peine que le produit de l'élément fu par le carré de sa distance à l'axe GT est représenté par $ds\,[qq + (-\frac{3}{8}b - x)^2]$, quantité dans laquelle il n'y a que s de variable. Intégrant & faisant ensuite $s = DC = \frac{b}{a}\sqrt{[m^2 - q^2]}$, on a $[qq + (\frac{3}{8}b - x)^2] \times \frac{b}{a}\sqrt{[m^2 - q^2]}$ pour la somme des produits de tous les points de DC par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Multipliant cette somme par dq, intégrant en ne faisant varier que q, on trouvera $\frac{b}{a}([\frac{m^2}{4} + (-\frac{3}{8}b - x)^2]\int dq\sqrt{[m^2 - q^2]} - \frac{q(mm-qq)^{\frac{3}{2}}}{4})$ pour la somme des produits de tous les points de l'aire elliptique $CDOE$ par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Faisant $q = m = \frac{a}{b}\sqrt{[bb - xx]}$; considérant qu'alors $\int dq\sqrt{[m^2 - q^2]} = \frac{n \cdot m^2}{4} = \frac{na^2(bb-xx)}{4b^2}$; & quadruplant l'intégrale: il nous viendra $\frac{nb}{a} \times [\frac{a^4(bb-xx)^2}{4b^4} + \frac{a^2(bb-xx)}{b^2}(\frac{3}{8}b - x)^2]$ pour la somme des produits de tous les points de l'ellipse entière $MENI$, par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Enfin, multipliant par dx,

intégrant en ne faisant varier que x, faisant ensuite $x = b$, on aura $\int(\psi^2 + \mu^2)\, dM = \frac{n(64 a^3 b^2 + 19 a b^4)}{480}$.

6.° On trouvera de la même manière la somme des produits des particules du demi-ellipsoïde par les carrés de leurs distances à l'axe longitudinal GV, ou $\int(\lambda^2 + \mu^2)\, dM = \frac{83\, n a b^4}{480}$.

Il suit de tous ces détails qu'en faisant, pour abréger un peu, $2 b^3 - 3 b^2 f + f^3 = \alpha^3$, $aa - bb = \beta^2$, $bb - ff = \gamma^2$, on aura

$$Z = \frac{16 b^2 \alpha^3 \delta}{3(b^3 \alpha^3 + 2 \beta^2 \gamma^4)};\quad Y = \frac{16 \delta^2}{3 b};$$

$$L = \frac{(64 a^2 b^5 + 19 b^7) p}{60 \varpi (b^3 \alpha^3 + 2 \beta^2 \gamma^4)};\quad L' = \frac{83\, p b^4}{60 \varpi \alpha^3}.$$

On peut tirer de ces formules plusieurs conséquences intéressantes, comme, par exemple, les dimensions du sphéroïde, les plus propres à lui procurer des oscillations douces, par la combinaison la plus avantageuse de leur amplitude avec leur durée; matière curieuse en elle-même, & qui peut avoir des applications fort utiles dans l'arrimage des vaisseaux. Mais ces discussions nous méneroient trop loin.



CHAPITRE XV.

De la Figure de la Terre, en tant qu'elle peut dépendre des loix de l'Hydrostatique.

(174.) LA Terre paroît former, dans sa plus grande partie, une maſſe ſolide. Mais lorſque l'on conſidère d'un côté la vaſte étendue des mers, leur profondeur, leur communication univerſelle & réciproque, la quantité de rivières qui ſillonnent la ſurface du globe; & lorſque d'un autre côté, en pénétrant dans ſon intérieur, on y trouve les corps ou les débris de productions maritimes de toute eſpèce : on eſt fortement porté à penſer que la Terre étoit originairement une maſſe fluide qui s'eſt conſolidée en partie par la ſucceſſion des temps, & qui, pour arriver à cet état, a dû prendre la forme que demandoient les loix de l'équilibre des fluides. En conſidérant donc la Terre ſous ce point de vue, ſa figure eſt déterminable par les principes de l'Hydroſtatique, comme nous allons le faire voir.

Nous appellerons *peſanteurs*, des forces qui ſont en effet de la même nature que la gravité dans l'hypothèſe de Galilée, mais qui peuvent être d'ailleurs conſtantes ou variables, ſoit en quantités, ſoit en directions.

(175.) Huguens & Newton sont les premiers qui aient entrepris de résoudre le problème dont il s'agit; leurs solutions méritent d'être connues, quoiqu'elles ne soient plus aujourd'hui que de très-petites branches de cette théorie qui a fait des progrès considérables. Huguens prend pour base, que *si une masse fluide pesante dans tous ses points est en équilibre, sa surface doit couper perpendiculairement les directions des pesanteurs des particules qui y sont placées :* Newton, que *si une masse fluide pesante est en équilibre, deux colonnes quelconques menées à un même point fixe, considéré comme centre, se contrebalancent mutuellement & indépendamment du reste de la masse:* Voici la manière d'appliquer l'un & l'autre principes à la recherche de la figure de la Terre.

(176.) PROBLÈME I. *La Terre supposée fluide, ayant la forme d'un solide de révolution, & chacun de ses points étant soumis à l'action d'une pesanteur donnée & de la force centrifuge : trouver sa figure!*

SOLUTION PAR LE PRINCIPE DE HUGUENS.

Fig. 63. Soient *(Fig. 63)*, C le centre de la Terre; $DAEB$ l'un de ses méridiens, ou la section de cette planète par un plan qui passe par l'axe de révolution DE. Que la pesanteur au point M ait la direction quelconque MO; représentons cette force par MF, & décomposons-là en deux autres MH, MK, perpendiculaires aux deux axes $D E$, $A B$ du méridien. La force centrifuge

du point M qui circule autour de DE, eſt proportionnelle, comme on ſait, à l'ordonnée MP: je repréſente par HI cette force qui agit en ſens contraire de la force MH. Alors, on voit que le point M eſt animé par les deux forces MI, MK; d'où réſulte la force compoſée MV, laquelle doit être perpendiculaire à l'élément Mm du méridien. Suppoſons $CP = x$; $PM = y$; Force $MF = \varphi$; l'angle OMP, pour le rayon 1, $= z$; & nommons f la force centrifuge *donnée* pour une diſtance *donnée* k. On aura, Force $MH = \varphi$ coſ. z; Force $MK = \varphi$ ſin. z; Force $HI = \frac{fy}{k}$; Force $MI = \varphi$ coſ. $z - \frac{fy}{k}$. Maintenant, en mettant l'ordonnée mp, les triangles rectangles ſemblables Mrm, VKM, donneront, $Mr\ (-dx) : rm\ (dy) :: KV\ (\varphi \text{ coſ. } z - \frac{fy}{k}) : MK\ (\varphi \text{ ſin. } z)$; d'où l'on tire, pour l'équation du méridien,

$$(\varphi \text{ coſ. } z - \frac{fy}{k})\, dy = - \varphi \text{ ſin. } z . dx.$$

Solution par le principe de Newton.

Soient (*Fig.* 64) $DAEB$ le méridien; DE l'axe de révolution; C le centre de la Terre, où tendent la colonne polaire DC & la colonne quelconque MC, leſquelles doivent ſe faire mutuellement équilibre. Prenons ſur CM le point quelconque R, dont la peſanteur eſt dirigée ſuivant RO, & que je repréſente par Rt; décompoſons Fig. 64.

cette force en deux autres Rh, Ri, l'une dirigée suivant MC, l'autre perpendiculaire à MC. Représentons par Rz la force centrifuge du point R, laquelle agit dans le sens QR, perpendiculairement à l'axe de révolution DE; & décomposons-là en deux autres Rs, Ru, l'une dirigée suivant CM, l'autre perpendiculaire à CM. Il est évident que les forces Ri, Ru ne contribuent en rien au poids du canal RC dans le sens MC, & qu'il ne faut avoir égard qu'aux forces Rh, Rs. Supposons l'abscisse $CP = x$; l'ordonnée $PM = y$; l'angle $CRO = p$; $CR = r$; $RQ = u$: Force $Rt = \varphi$; la force centrifuge pour la distance k, $= f$. On aura, Force $Rh = \varphi$ cos. p; Force $Rz = \frac{fu}{k}$; Force $Rs = \frac{fu^2}{kr}$. Donc la pression du canal RC sur le point C, est $\int dr\,(\varphi \text{ cos. } p - \frac{fu^2}{kr})$, ou $\int dr\,[\varphi \text{ cos. } p - \frac{fy^2r}{k(xx+yy)}]$, intégrale qu'il faut prendre, en regardant x & y comme constantes; ensuite, pour avoir le poids du canal entier MC, il faudra faire $r = CM = \sqrt{(xx+yy)}$; ce qui donnera une expression qu'on égalera au poids connu de la colonne DC.

(177.) COROLLAIRE. Supposons, pour faire une application très-simple de ce problème, que la pesanteur φ soit constante & dirigée au centre C de la Terre (*Fig. 63 & 64*). On aura

(*Fig.* 63), $\sin. z = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, $\cos. z = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; & l'équation du méridien, trouvée par le principe de Huguens, deviendra $\frac{\varphi y\, dy}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{fy\, dy}{k} = -\frac{\varphi x\, dx}{\sqrt{(xx+yy)}}$, ou $\frac{\varphi(x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{fy\,dy}{k} = 0$, dont l'intégrale est $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k} = A$. La constante A doit être telle qu'en faisant $y = 0$, on ait $x = CD$, quantité donnée.

Dans la *Figure* 64, on a $p = 0$, & la quantité $\int dr(\varphi \cos. p - \frac{fy^2 r}{k(xx+yy)})$ devient d'abord, $\varphi r - \frac{fy^2 r^2}{2k(xx+yy)}$. Faisant $r = CM = \sqrt{(xx+yy)}$, on a $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k}$, pour tout le poids de la colonne CM, lequel doit être égal au poids connu de la colonne DC; d'où l'on tire, comme tout-à-l'heure, $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k} = A$, pour l'équation du méridien.

(178.) REMARQUE I. Les principes de Huguens & de Newton, qui nous ont donné la même équation pour le méridien dans l'hypothèse du corollaire précédent, donnent également les mêmes équations dans plusieurs autres hypothèses de pesanteurs. Mais il y a des cas où les résultats sont différens. Le principe de Huguens

établit l'équilibre à la surface du fluide ; celui de Newton l'établit dans l'intérieur par rapport au centre ; mais ces deux conditions ne sont pas suffisantes séparément, ni même en certains cas, conjointement, pour établir l'équilibre dans tous les points de la masse. Voyez *les Mém. de l'Acad. pour l'année 1734*, & le *Traité de la figure de la Terre* de M. Clairaut, *page 31*.

(179.) *REMARQUE* II. L'équilibre a lieu dans tous les points de la masse, lorsqu'en y prenant un point quelconque (& non pas seulement un point fixe & déterminé, comme a fait Newton), on trouve que ce point est en équilibre, ou qu'il est également pressé en toutes sortes de sens. De ce principe général que M. Maclaurin a développé clairement le premier, il suit :

Fig. 65. 1.° Que dans toute masse fluide *OAN (Fig. 65)*, soumise à des forces quelconques & en équilibre, le canal angulaire *OMN*, terminé de part & d'autre à la surface, est séparément en équilibre. Car la masse entière étant en équilibre, la particule *M* est également pressée dans tous les sens ; & cette égalité de pression demeurera la même, si l'on conçoit que le canal *OMN* demeure seul fluide, le reste de la masse étant supposé se durcir.

2.° Que le canal triangulaire *OMR*, dont un angle *O* est à la surface du fluide, est en équilibre. Car si l'on prolonge *MR* jusques à la surface

du fluide, les deux canaux angulaires OMN, ORN ſont chacun ſéparément en équilibre. Donc * $P.OM = P.NM$, & $P.OR = P.NR$. Or, $P.NM = P.NR + P.RM = P.OR + P.RM$; donc $P.OM = P.OR + P.RM$; c'eſt-à-dire, que le point M ſouffre une égale preſſion de la part de la colonne OM, & de la part des deux colonnes OR, RM, qui agiſſent ſur ce point de la même manière que ſi elles étoient placées en ligne droite. Donc il ne peut y avoir de mouvement dans le canal OMR, ni dans le ſens OMR, ni dans le ſens ORM; & par conſéquent ce canal eſt en équilibre.

3.° Que le canal triangulaire MRQ, pris dans l'intérieur de la maſſe eſt en équilibre. Car ſi l'on prolonge MR, MQ, QR juſques à la ſurface du fluide, les trois canaux OMN, OQZ, NRZ, feront en équilibre, comme on l'a vu n.° 1. Donc $P.OM = P.NM$, ou $P.OQ + P.QM = P.NR + P.RM$; & $P.OQ = P.RQ + P.ZR$, ou $P.OQ = P.RQ + P.NR$. Subſtituant cette valeur de $P.OQ$, dans l'équation précédente, il viendra $P.QM + P.RQ = P.RM$. Ainſi, la ſomme des preſſions des colonnes QM, RQ, ſur le point M, eſt égale à la preſſion de la colonne RM ſur ce

* Je déſigne, pour abréger, la preſſion d'une colonne par la lettre initiale P, écrite en avant.

même point ; & par conſéquent le canal *QMR* eſt en équilibre.

Fig. 66. 4.° Que le canal *OMRQN* (*Fig. 66*), de figure quelconque, rectiligne ou curviligne, terminé de part & d'autre à la ſurface du fluide, eſt en équilibre. Car ſi l'on mène les diagonales *OR*, *OQ*, tous les canaux *OMR*, *ORQ*, *OQN* ſeront en équilibre. Donc $P.OM = P.RM + P.OR$; $P.OR = P.QR + P.OQ$; $P.OQ = P.NQ$. Ainſi $P.OM = P.RM + P.QR + P.NQ$; c'eſt-à-dire, que la preſſion de la colonne *OM* ſur le point *M*, eſt égale à la ſomme des preſſions des colonnes *RM*, *QR*, *NQ*, ſur ce même point ; d'où réſulte l'équilibre du canal *OMRQN*. Cette concluſion a toujours lieu, même dans le cas où tous les côtés du polygone ou de la courbe *OMRQN*, ne ſeroient pas ſitués dans un même plan.

Fig. 67. 5.° Que le canal *MRQTV* (*Fig. 67*), de figure quelconque, rentrant en lui-même, pris dans l'intérieur du fluide, eſt en équilibre. Car ſi l'on mène les diagonales *MQ*, *MT*, on verra que tous les canaux triangulaires *MRQ*, *MQT*, *MTV*, étant en équilibre, la preſſion de la colonne *RM* ſur le point *M*, eſt égale à la ſomme des preſſions des colonnes *RQ*, *QT*, *TV*, *VM*, ſur ce même point ; d'où réſulte l'équilibre dans le canal *MRQTV*, quels que ſoient le nombre & la poſition de ſes côtés.

(180.)

(180.) *REMARQUE III.* On voit que le principe de Newton, ou l'équilibre de deux colonnes centrales, n'eſt qu'un cas particulier du *n.° 1* de l'article précédent ; & que celui de Huguens, ou la perpendicularité de la peſanteur à la ſurface du fluide, aura lieu lorſque le *n.° 4* du même article ſera vérifié, c'eſt-à-dire, quand un canal de figure quelconque, terminé de part & d'autre à la ſurface du fluide, ſera en équilibre : car on peut concevoir que ce canal eſt couché immédiatement à la ſurface du fluide, qu'il eſt, par exemple, *OKN (Fig. 66)*; & alors l'état d'équilibre demande néceſſairement que la peſanteur ſoit perpendiculaire en chacun des points de ce canal, ſans quoi il y auroit un courant dans le ſens *OKNA*, ou dans le ſens contraire *NKOA*.

Les Géomètres qui ont écrit ſur cette matière, & en particulier M. Clairaut, ont fait un grand uſage de ces propriétés des canaux, pour reconnoître l'équilibre de la Terre & pour déterminer ſa figure dans différentes hypothèſes de peſanteurs. Mais on peut parvenir au même but d'une manière plus commode, en employant immédiatement le principe d'égalité de preſſion d'une particule quelconque. Appliquons cette méthode à un problème général.

(181.) PROBLÈME II. *La maſſe fluide* ADBE (Fig. 68), *tournant autour de l'axe* DE, *& chacun de ſes points étant ſoumis à l'action de* Fig. 68.

la force centrifuge, & d'une pesanteur dirigée vers le centre fixe C, *& proportionnelle à une fonction donnée de la distance à ce point : trouver directement sa figure, par le principe d'égalité de pression !*

Soit N un point quelconque de la planète; & supposons que le lieu de tous les points où la pression est la même qu'en N, soit la couche ou la courbe $KTOH$. Menons du centre C la droite CNM, & des points N, M les perpendiculaires NQ, MP à l'axe de révolution DE. Supposons $CQ = s$; $QN = z$; $CN = u$; la force centrale du point $N = \varphi$, fonction de s & z; la force centrifuge $= f$, pour la distance donnée k; la pression en $N = p$, fonction de s & z, en sorte que $dp = Pds + Qdz$, P & Q étant des fonctions de s & z, telles que $Pds + Qdz$ soit une différentielle complète, autrement p seroit une quantité imaginaire, & il ne pourroit pas y avoir équilibre. Considérons la portion de fluide qui est en N comme un petit rectangle $Nnrq$, dont la hauteur $Nn = ds$, & la base $Nq = dz$: il est clair que Pds, différentielle de p en ne faisant varier que s, exprime l'élément de la pression sur chaque point de nr; & que Qdz, différentielle de p en ne faisant varier que z, exprime l'élément de la pression sur chaque point de qr. Donc la pression élémentaire contre $nr = Pds . dz$, & la pression élémentaire contre $qr = Qdz . ds$. Je décompose la force centrale φ en deux autres, l'une dirigée

ſuivant $N n$, l'autre ſuivant $N q$: la première eſt $-\frac{\varphi s}{u}$; la ſeconde, $-\frac{\varphi z}{u}$: à celle-ci il faut ajouter la force centrifuge du point N, qui eſt $\frac{fz}{k}$. Alors, la force abſolue qui pouſſe l'élément $Nnrq$ dans le ſens Nn eſt $-\frac{\varphi s}{u}.dsdz$, & la force abſolue qui le pouſſe dans le ſens Nq eſt $(\frac{fz}{k}-\frac{\varphi z}{u}).dsdz$. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que ces deux forces ſoient égales chacune à chacune des preſſions correſpondantes & contraires. Donc $-\frac{\varphi s}{u}.dsdz = Pdsdz$, ou $-\frac{\varphi s}{u} = P$; $(\frac{fz}{k}-\frac{\varphi z}{u}).dsdz = Qdzds$, ou $\frac{fz}{k}-\frac{\varphi z}{u} = Q$. Ainſi $dp = -\frac{\varphi s ds}{u} + (\frac{fz}{k}-\frac{\varphi z}{u})dz = -\frac{\varphi(sds+zdz)}{u} + \frac{fzdz}{k} = -\varphi du + \frac{fzdz}{k}$, & $p = A - \int\varphi du + \frac{fz^2}{2k}$, quantité qui doit être conſtante pour tous les points d'une même couche. Cette condition va nous donner la nature de la courbe extrême $ADBE$, & de la courbe intérieure $KTOH$.

Tout le reſte demeurant le même, ſoient $CP = x$; $PM = y$; $CM = r$; la force centrale en $M = F$. La valeur générale de p

devient pour le point M, $p = A - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k}$. Or, il eſt évident que dans toute l'étendue de la couche ſupérieure & dernière *ADBE*, la preſſion doit être nulle. Donc l'équation de cette courbe eſt $A - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k} = 0$. Cette équation doit convenir à tous les points de la courbe *ADBE*; & pour déterminer la conſtante A, il faut ſe donner un point fixe par où la courbe doive paſſer. Soit A ce point; ſuppoſons $CA = b$, & pour ce même point $y = b$, $\int F\,dr = B$, quantité connue : on aura $A - B + \frac{fb^2}{2k} = 0$, ou $A = B - \frac{fb^2}{2k}$. L'équation de la courbe *ADBE*, entre r & y, eſt donc $B - \frac{fb^2}{2k} - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k} = 0$.

Pour trouver l'équation de la courbe *KTOH*, reprenons la formule $p = A - \int \varphi\,du + \frac{fz^2}{2k^2}$, ou $p = B - \frac{fb^2}{2k} - \int \varphi\,du + \frac{fz^2}{2k}$. Donnons-nous le point K; ſuppoſons $CK = c$; & pour ce même point $z = c$, $\int \varphi\,du = C$, quantité connue; d'où $p = B - \frac{fb^2}{2k} - C + \frac{fc^2}{2k}$. Ainſi, l'équation de la courbe *KTOH*,

entre u & z, eſt $B - \frac{f b^2}{2 k} - C + \frac{f c^2}{2 k} = B - \frac{f b^2}{2 k} - \int \varphi \, d u + \frac{f z^2}{2 k}$, ou $C - \frac{f c^2}{2 k} - \int \varphi \, d u + \frac{f z^2}{2 k} = 0$.

Faiſons une ou deux applications de ces formules.

(182.) COROLLAIRE I. Suppoſons que la force centrale ſoit conſtante dans tous les points de la Planète, & qu'elle ait pour valeur la gravité ordinaire g: on aura $F = g$; $\int F d r = g r$; $B = g b$; & l'équation de la courbe $ADBE$ ſera $g b - \frac{f b^2}{2 k} - g r + \frac{f y^2}{2 k} = 0$. Celle de la courbe $KTOH$ ſera ſemblablement $g c - \frac{f c^2}{2 k} - g u + \frac{f z^2}{2 k} = 0$.

Pour déterminer le rapport du rayon CA de l'équateur au demi-axe CD, on obſervera que pour CA, on a $r = y = b$; & pour CD, $y = 0$, ce qui donne $CD = r = b - \frac{f b^2}{2 k g}$. Donc $CA : CD :: b : b - \frac{f b^2}{2 k g} :: 1 : 1 - \frac{f b}{2 k g}$; ou bien (en ſuppoſant la quantité arbitraire & donnée $k = b$), $CA : CD :: 1 : 1 - \frac{f}{2 g}$.

Si maintenant nous voulons exprimer en nombres le rapport qui règne dans cette proportion, nous

nous rappellerons (ce qui est démontré dans plusieurs livres de Mécanique) qu'en nommant t le temps qu'un corps, animé de la gravité g, met à tomber de la hauteur b; T, le temps qu'un mobile emploie à parcourir la circonférence entière C du cercle dont le rayon $= b$; f, sa force centrifuge : on a ces équations, $g = \frac{2b}{t^2}$; $f = \frac{C^2}{bT^2} = \frac{4b\Pi^2}{T^2}$, Π exprimant le rapport de la circonférence au diamètre : $\frac{f}{g} = \frac{2\Pi^2 t^2}{T^2}$; nous nous rappellerons de plus que les corps graves parcourent environ 15 pieds pendant la première seconde de leur chute; & que chaque degré d'un grand cercle de la Terre vaut environ 57000 toises; enfin nous considérerons qu'ici $T = 24$ heures, temps de la révolution de la Terre sur son axe. En calculant d'après ces données, la fraction $\frac{2\Pi^2 t^2}{T^2}$, on trouvera qu'elle vaut sensiblement $\frac{1}{289{,}49}$. Donc $CA : CD :: 1 : 1 - \frac{1}{578{,}98} :: 578{,}98 : 579{,}98 :: 579 : 578$, à peu-près. Ce rapport diffère beaucoup de celui que donnent les observations, comme on le verra bientôt; & par conséquent l'hypothèse d'où on l'a déduit, n'est pas conforme à la Nature.

(183.) COROLLAIRE II. Soit la force

centrale proportionnelle à la distance au centre; & supposons que pour la distance b, sa valeur soit la gravité ordinaire g; on aura, $F = \frac{gr}{b}$; $\int F\,dr = \frac{gr^2}{2b}$; $B = \frac{gb}{2}$; & l'équation de la courbe $ADBE$ sera $\frac{gb}{2} - \frac{fb^2}{2k} - \frac{gr^2}{2b} + \frac{fy^2}{2k} = 0$. Celle de la courbe $KTOH$ sera de même, $\frac{ge}{2} - \frac{fc^2}{2k} - \frac{gu^2}{2b} + \frac{fz^2}{2k} = 0$.

En cherchant dans cette hypothèse le rapport numérique des axes de la Terre, on trouveroit $CA : CD :: 425 : 424$, à peu-près; ce qui n'est pas non plus conforme au résultat des observations.

Voyez sur toute cette matière un excellent Mémoire de M. Euler, intitulé: *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides* (Académie de Berlin, 1755).

(184.) PROBLÈME III. *Déterminer, par le moyen des observations, le rapport des axes de la Terre, en regardant cette Planète comme un sphéroïde elliptique peu différent d'une sphère!*

Soient $ADBE$ (*Fig. 69*), un méridien de la Terre; DE son axe; AB le diamètre de l'équateur; MN, mn deux arcs d'un même nombre de degrés, dont on a mesuré les longueurs Fig. 69.

& qui ſont ſuppoſés aſſez petits pour pouvoir être regardés comme de petites lignes droites, ou de petits arcs de cercle ; MO, NO, mo, no, les rayons de la développée correſpondans aux points M, N, m, n ; MP, mp, des ordonnées perpendiculaires au diamètre de l'équateur. Suppoſons $CD = a$; $CA = b$; $bb - aa = cc$; $CP = x$; $Cp = u$; $MO = R$; $mo = r$; le ſinus total $= 1$; l'angle connu MSB de la latitude du point $M = p$; l'angle auſſi connu msB de la latitude du point $m = q$; la longueur de l'arc $MN = M$; celle de l'arc $mn = m$. On aura d'abord, à cauſe des triangles ou ſecteurs ſemblables MON, mon, $R : r :: M : m$; ou $Rm = rM$. La propriété de l'ellipſe donne,

$$PM = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - xx)} ; \; SP = \frac{aax}{bb} ;$$

$$pm = \frac{a}{b} \sqrt{(bb - uu)} ; \; sp = \frac{aau}{bb} ;$$

$$R = \frac{(b^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4} ; \; r = \frac{(b^4 - c^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4} .$$

D'un autre côté, on a, $SP : PM :: \text{coſ.}\, p : \text{ſin.}\, p$; ce qui donne $x^2 = \frac{b^4 (\text{coſ.}\, p)^2}{b^2 - c^2 (\text{ſin.}\, p)^2}$. Semblablement, $u^2 = \frac{b^4 \,\text{coſ.}\, q^2}{b^2 - c^2 (\text{ſin.}\, q)^2}$.

Subſtituant dans l'équation $Rm = rM$, pour R & r leurs valeurs, pour x^2 & u^2 leurs valeurs ; faiſant le développement en ſéries, pour la ſimplicité des calculs numériques ; & obſervant qu'à cauſe que l'ellipſoïde diffère peu d'une ſphère, on peut

négliger les termes qui contiendroient le carré de c^2 & les puissances plus hautes ; on trouvera, toutes réductions faites, $c^2 = \frac{2\,b^2\,(m - M)}{3\,m\,(\text{cos}.\,p)^2 - 3\,M\,(\text{cos}.\,q)^2}$;

$a^2 = b^2 - \frac{2\,b^2\,(m - M)}{3\,m\,(\text{cos}.\,p)^2 - 3\,M\,(\text{cos}.\,q)^2}$; &

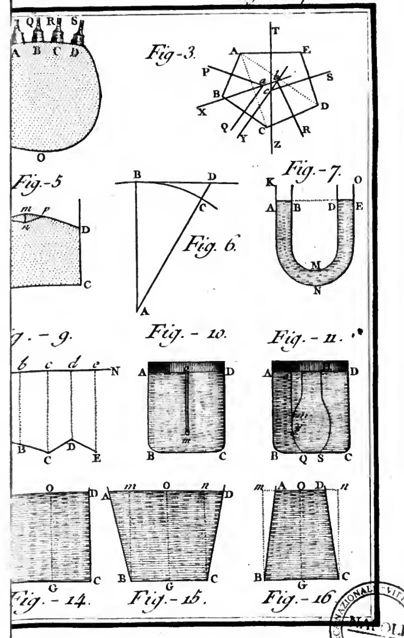
$b : a :: 1 : \sqrt{}[1 - \frac{2\,(m - M)}{3\,m\,(\text{cos}.\,p)^2 - 3\,M\,(\text{cos}.\,q)^2}$.

Cela posé, selon M. Bouguer (*Figure de la Terre, page 274*), le premier degré de latitude $=$ 56753 toises ; & selon M. de Maupertuis (*Figure de la Terre, page 125*), le degré de latitude au cercle polaire $=$ 57437,9 toises. Supposant donc $m =$ 56753 toises ; $M =$ 57437,9 toises ; $q = 0$; $p = 66\frac{1}{2}$ degrés ; & par conséquent cos. $q = 1$; cos. $p = 0,39875$; & substituant ces valeurs dans la proportion précédente, elle deviendra, $b : a :: 179 : 178$, à peu-près. Tel est le rapport des axes de la Terre, résultant de la comparaison des observations faites au Pérou & au Nord. On trouve à peu-près la même chose, en comparant les observations faites en France avec celles du Pérou ou du Nord.

Il est évident que connoissant le nombre de degrés des arcs m & M, & leurs longueurs absolues, on connoîtra aussi les longueurs absolues des rayons R, r. D'où il résulte qu'ayant trouvé le rapport de b à c, on connoîtra aussi les longueurs absolues de b, de c, de a ; & par conséquent toutes les dimensions du sphéroïde terrestre.

La nature de cet Ouvrage ne me permet pas de plus grands détails sur la question de la figure de la Terre. Je me contenterai d'ajouter que depuis plus de cent ans qu'on s'ocupe de cette question, les Géomètres & les Astronomes trouvent encore les plus grandes difficultés, non-seulement à expliquer les observations par la théorie, mais encore à concilier ensemble les résultats des mesures des Degrés du Méridien, qui ont été prises en divers climats. La plupart de ces mesures, comparées entr'elles, permettent d'attribuer à la Terre la figure d'un sphéroïde elliptique aplati, dont le rapport des axes est à peu-près tel que nous venons de le trouver: quelques-unes donnent l'exclusion à cette hypothèse, & même emportent de la dissimilitude dans les méridiens. C'est sur quoi on peut consulter plusieurs Ouvrages particuliers, dont l'énumération seroit trop longue, les Mémoires des Académies de Paris, de Berlin, de Péterstbourg, & principalement l'article *Figure de la Terre*, dans l'*Encyclopédie*.

FIN de l'Hydrostatique.



Q R S
A B C D
O
Fig-3.
T
A E
P S
B
X D
Q R
Y C
Z
Fig.-5
m p
n
D
C
B D
C
Fig. 6.
A
Fig.-7.
K O
A B D E
M
N
Fig. - 10.
Fig. - 11.
b c d e N
B C D E
A D
m
B C
A D
B Q S C
O D
G C
m O n
A D
B G C
m A O D n
B G C
Fig. - 14.
Fig. - 15.
Fig. - 16

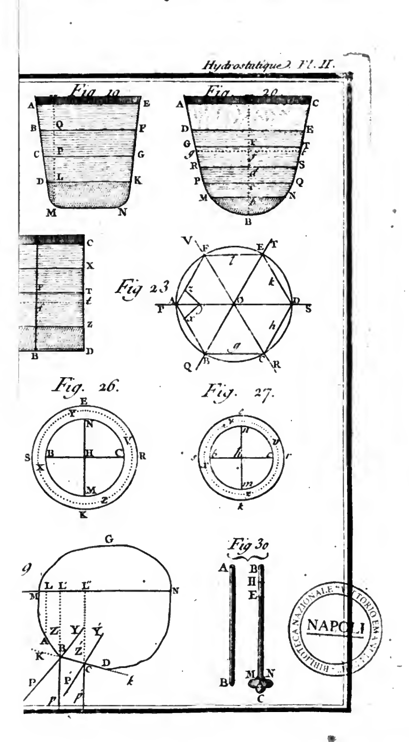
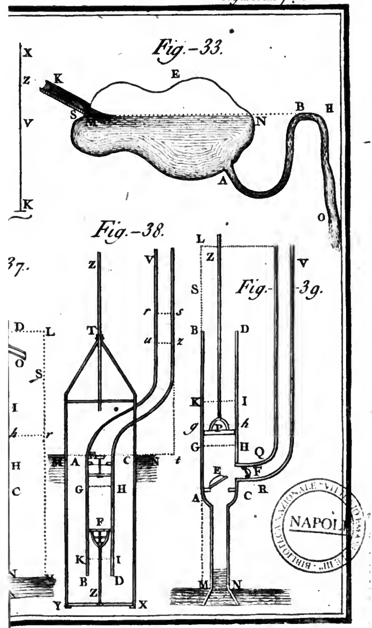


Fig. 19
Fig. 20
Fig 23
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig 30


Fig.-33.
X
z
K
E
S
M
N
B
H
V
A
O
K
Fig.-38.
37.
Z
V
r
s
u
z
T
D
L
O
S
I
h
r
H
A
C
N
t
G
H
F
K
I
B
D
Z
Y
X
L
Z
V
S
Fig.-39.
B
D
K
I
g
P
h
G
H
Q
E
F
A
C
R
M
N

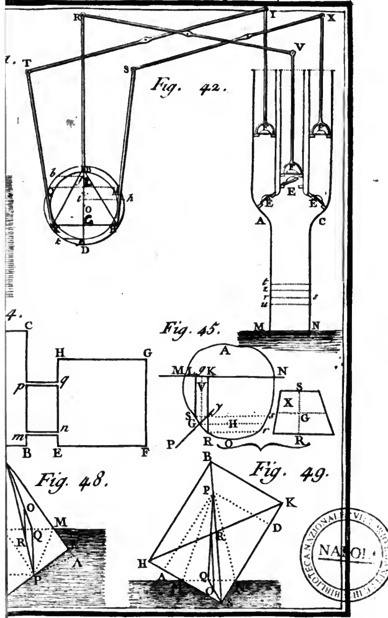
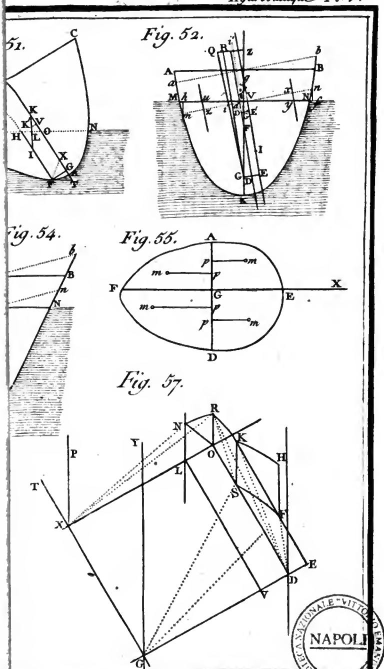
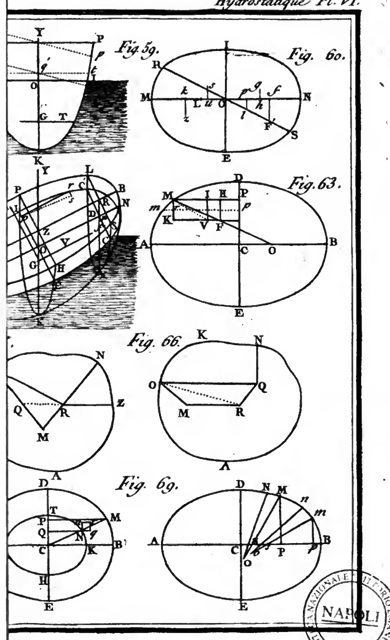


Fig. 42.
Fig. 45.
Fig. 48.
Fig. 49.



51.
Fig. 52.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 57.


Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 63.
Fig. 66.
Fig. 69.

SECONDE PARTIE.

HYDRAULIQUE.

(185.) Sous le nom d'*Hydraulique*, on ne comprend pour l'ordinaire que la ſcience du mouvement des eaux ; mais je prends ici ce mot dans un ſens plus étendu, & j'entends par-là cette partie de la Mécanique, qui détermine en général les loix du mouvement des fluides, tant incompreſſibles qu'élaſtiques.

Comme le mouvement des eaux eſt en ce genre l'objet le plus intéreſſant pour les beſoins de la ſociété, il en ſera principalement ici queſtion. Mais ce que j'en dirai s'applique également à tous les fluides incompreſſibles, & je me ſervirai ſouvent du mot *eau* comme d'un mot générique, pour déſigner ces ſortes de fluides. Le mouvement des fluides élaſtiques ſera traité à part. A ces Théories générales, je mêlerai ou je ferai ſuccéder des queſtions qui appartiennent à l'Hydraulique, & qui, par leur importance ou leur utilité-pratique, attireront peut-être l'attention de ces Lecteurs, dont le goût ne ſe borne pas à la ſimple recherche des vérités ſpéculatives, mais ſe porte de plus vers l'uſage de ces vérités.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux du mouvement des Fluides.

(186.) LE principe d'égalité de pression, sur lequel nous avons établi, dans la première partie de cet Ouvrage, les loix de l'équilibre des fluides, peut servir aussi à représenter, par des formules analytiques, les loix du mouvement des fluides. On en verra la preuve ci-dessous *(Chap. V)*. Mais comme les formules dont il s'agit, dans leur état de généralité sont fort compliquées & presque inapplicables à la pratique, même pour les cas les plus simples, je vais examiner d'abord si, en renonçant à la trop scrupuleuse exactitude des hypothèses, sans s'exposer néanmoins au risque de commettre des erreurs sensibles dans la pratique, il n'est pas possible de soumettre le mouvement des fluides aux principes de la Mécanique & de la Géométrie. Cet ordre me paroît le plus naturel dans un Ouvrage destiné principalement à l'utilité publique : les objets de pure curiosité ne doivent trouver place ici qu'en seconde ligne.

(187.) On a observé que lorsqu'un fluide sort d'un vase par une ouverture faite au fond ou aux parois, sa surface demeure toujours horizontale, au moins sensiblement, & abstraction faite de la cause qui produit au-dessus de l'orifice une espèce d'entonnoir, quand la surface du fluide est très-

proche de l'orifice. D'où l'on a conclu, 1.° qu'en divisant, par la pensée, le fluide en une infinité de tranches horizontales, ces tranches, à mesure qu'elles s'abaissent, conservent sensiblement leur parallélisme. 2.° Que chaque point d'une même tranche descend verticalement, à l'exception toutefois des points qui avoisinent les parois supposées inclinées, mais dont le nombre est infiniment petit par rapport à celui des autres points de la tranche. La plupart des Ouvrages où il est question du mouvement des fluides : par exemple, l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, celle de Jean Bernoulli, les Théorèmes que Maclaurin a donnés à ce sujet dans son livre des *Fluxions*, le *Traité des Fluides* de M. d'Alembert, &c. sont fondés sur ces deux hypothèses, qui dans les cas les plus usuels, mènent à des calculs assez simples & assez exacts. Je les emploîrai donc également; mais voici auparavant quelques remarques essentielles.

(188.) Soit *ABCD* (*Fig. 1*) un vase qui contient de l'eau, laquelle sort par l'ouverture *PQ*, pratiquée dans le fond *BC*. Il résulte de l'extrême mobilité des particules fluides, qu'en vertu de la pesanteur, & des autres forces extérieures dont elles peuvent éprouver l'action, elles doivent se contre-balancer & se presser mutuellement, de telle manière qu'elles tendent à se diriger vers l'orifice, puisqu'en cet endroit le fond ou les parois du vase n'offrent aucune résistance à Fig. 1.

la sortie du fluide. L'expérience apprend qu'elles descendent avec des vitesses sensiblement verticales & égales, jusqu'à ce qu'elles soient arrivées à une certaine distance de l'orifice, ou plutôt du plan horizontal qui rase le bord supérieur de cet orifice; distance qu'il est difficile de déterminer exactement, mais que j'ai évaluée plusieurs fois à trois ou quatre pouces. Passé ce terme, les particules qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, se détournent de la direction verticale, & viennent de tous côtés gagner l'orifice suivant des directions plus ou moins obliques. Les sections *A D, E F, G H,* &c. planes ou courbes, sont supposées perpendiculaires aux directions des mêmes particules, c'est-à-dire, que les mêmes particules individuelles qui sont en *A D,* descendent successivement en *E F, G H,* &c. Il est visible que lorsque le vase est entretenu constamment plein à la même hauteur au-dessus de l'orifice, par de nouvelle eau qui remplace celle qui sort, & que l'écoulement a pris un cours régulier & permanent, les sections *A D, E F, G H,* &c. doivent toujours être les mêmes. Car aux mêmes endroits, les particules ont les mêmes vitesses, tant en direction qu'en quantité. Mais si la hauteur du fluide dans le réservoir augmente ou diminue, les sections dont il s'agit doivent subir quelque changement de nature, parce que les vitesses ne sont plus les mêmes aux mêmes endroits. Cependant, malgré la tendance universelle

des particules vers l'orifice, leur petiteſſe & la facilité qu'elles ont à rouler les unes ſur les autres, établiſſent entr'elles un tel équilibre d'efforts & de poſition, que la ſurface ſupérieure du fluide demeure toujours horizontale, du moins juſques à une très-petite diſtance de l'orifice, comme on le verra dans la ſuite, lorſque je rapporterai en détail les expériences que j'ai faites ſur les écoulemens des fluides.

(189.) Il en eſt de même lorſque le fluide ſort par une ouverture latérale (*Fig. 2*). Toutes les particules deſcendent d'abord verticalement, puis ſe dirigent vers l'ouverture ; & la ſurface ſupérieure demeure toujours horizontale. Seulement on doit obſerver ici que ſi l'orifice latéral PQ a une hauteur ſenſible par rapport à celle de l'eau dans le réſervoir, toutes les particules n'ont pas la même vîteſſe, & qu'à raiſon d'une plus grande profondeur, elles ſe meuvent plus vîte vers le bas que vers le haut de l'orifice ; au lieu que dans les écoulemens par des orifices horizontaux, il ne peut pas y avoir dans la vîteſſe des particules, d'inégalité qui ſoit produite par une inégalité de profondeur dans les différens points de l'orifice. Fig. 2.

(190.) Que l'orifice par lequel le fluide s'échappe, ſoit horizontal ou latéral : comme les particules qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, s'y dirigent néanmoins avec des mouvemens plus ou moins obliques, il eſt clair qu'elles

tendent à conserver ces mouvemens, & que par conséquent la veine fluide, au sortir de *PQ*, doit se resserrer dans une certaine étendue *Pp*, & former ainsi une espèce de pyramide tronquée *PQqp*, dont la plus petite base *pq* répond à l'endroit où la veine cesse de se resserrer pour commencer à prendre la forme prismatique. Il est essentiel d'avoir égard à cette *contraction de la veine fluide*, pour mesurer exactement les dépenses des réservoirs par des orifices proposés. Elle est très-sensible dans les écoulemens qui se font par des orifices percés dans de minces parois. Car on voit la veine se resserrer considérablement au sortir de l'orifice; & on trouve, comme l'expérience nous l'apprendra ci-dessous, que l'aire de l'orifice *PQ* est à l'aire de la section *pq*, dans un rapport qui diffère très-peu de celui de 8 à 5. La section *pq* est distante de *PQ* d'une quantité à peu-près égale au rayon de l'orifice *PQ*. Dans les écoulemens par des bouts de tuyaux cylindriques, adaptés au réservoir, dénués de transparence, & assez longs pour que l'eau en suive les parois & sorte à gueule-bée, la contraction de la veine fluide ne se manifeste pas aux yeux; mais elle n'en existe pas moins à l'entrée de ces mêmes tuyaux. Elle y produit seulement un effet moins sensible que dans le premier cas; car alors la dépense diminue seulement dans le rapport de 8 à $6\frac{1}{2}$, à peu-près; au lieu que dans le premier cas elle diminue dans le rapport de 8 à 5, à peu-près. Tout cela sera pleinement

pleinement éclairci par la voie de l'expérience. Ici, où il n'eſt queſtion que de la théorie des écoulemens, je ſuppoſe qu'on ait diminué l'orifice dans le rapport que demande la contraction; & je regarde l'orifice corrigé de cette manière, comme celui par lequel ſe fait l'écoulement. Ainſi, lorſque l'eau ſort par un orifice percé dans une mince paroi, & dont l'aire $= A$, l'orifice corrigé & employé dans le calcul $= \frac{5}{8} A$; & lorſque l'eau ſort à gueule-bée par un tuyau additionnel dont la baſe $= A$, l'orifice rectifié $= \frac{13}{16} A$. Quant à la hauteur de l'eau dans le réſervoir, elle doit être comptée, dans le premier cas, depuis la ſurface du fluide juſqu'au point où la veine ceſſe de ſe reſſerrer: & dans le ſecond, depuis la ſurface du fluide juſqu'à l'ouverture extérieure du tuyau additionnel.

D'après ces remarques, nous allons établir deux propoſitions générales qui ſerviront de fondement à la théorie uſuelle de l'Hydraulique.

(191.) THÉORÈME I. *Le volume de liqueur qui ſort d'un vaſe par un orifice, eſt égal au produit de cet orifice par la ligne qui repréſente la vîteſſe de l'écoulement.*

Car il eſt évident qu'à chaque inſtant il ſort d'autant plus de points fluides, que l'orifice a plus d'étendue, & que ſur cette étendue chaque point fluide ſort avec plus de vîteſſe.

(192.) *REMARQUE.* On doit obſerver que j'ai dit le *volume* & non pas la *maſſe*. Ainſi, l'orifice

& la vîtesse étant les mêmes, il sortiroit, pendant le même temps, le même volume d'eau ou de mercure; mais la masse de l'eau seroit à celle du mercure comme 1 est à 14, les masses étant proportionnelles aux poids, & les poids de l'eau & du mercure, sous même volume, étant comme les nombres 1 & 14, à peu-près.

Fig. 1 & 2. (193.) THÉORÈME II. *Si l'on partage un fluide* A B C D (Fig. 1 & 2) *qui s'écoule par l'orifice* p q, *en une infinité de tranches* A D d a, E F f e, G H h g, *égales en volumes, par des plans horizontaux, ou en général par des surfaces perpendiculaires aux directions des vîtesses des particules; les vîtesses de ces particules seront entr'elles en raison inverse des bases supérieures ou inférieures des tranches.*

En effet, il est clair qu'on peut regarder les tranches $ADda$, $EFfe$, $GHhg$, comme des prismes dont les bases sont les sections AD, EF, GH, & les hauteurs les perpendiculaires Rr, Ll, Mm. Donc, puisque toutes ces tranches ont des volumes égaux, on aura, par exemple, $EF \times Ll = GH \times Mm$; ce qui donne $Ll : Mm :: GH : EF$. Or, à mesure qu'une tranche s'abaisse de sa hauteur, elle est remplacée par la suivante; ainsi de suite de proche en proche. Donc les hauteurs Ll, Mm expriment les espaces parcourus en temps égaux par les tranches $EFfe$, $GHhg$, ou, ce qui revient au même, les vîtesses de ces deux tranches. Par conséquent la proportion

$Ll : Mm :: GH : EF$, revient à l'énoncé du Théorème.

(194.) COROLLAIRE. La même proportion a lieu pour une tranche quelconque, prise dans l'intérieur du vase, & pour la tranche qui sort actuellement de l'orifice. D'où l'on voit que si l'orifice est infiniment petit par rapport à la section du vase qui forme l'une des bases de la tranche intérieure, la vîtesse au sortir de l'orifice sera infinie par rapport à la vîtesse de la tranche intérieure; ou, ce qui revient au même & ce qui a réellement lieu, la vîtesse, à l'orifice, sera finie, & la vîtesse de la tranche intérieure sera infiniment petite.

Dans l'application que nous allons faire de ces principes, nous regardons les vases où les fluides sont contenus, comme solides, & conservant toujours la même figure. La théorie du mouvement des fluides dans des vases flexibles, présente trop de difficultés du côté de l'analyse, pour pouvoir espérer d'en tirer quelques résultats applicables à la pratique. L'expérience est le meilleur guide que l'on puisse consulter dans ces sortes de problèmes.



CHAPITRE II.

De l'écoulement de l'eau qui sort d'un vase par un petit orifice.

(195.) THÉORÈME. *La vîtesse de l'eau, à sa*
Fig. 3. *sortie d'un vase* ABCD (Fig. 3), *par un orifice infiniment petit* p q, *est égale à celle qu'acquerroit un corps grave en tombant de la hauteur verticale* R q, *de la surface du fluide au-dessus de l'orifice.*

Imaginons que la liqueur soit partagée en une infinité de tranches égales, par des surfaces perpendiculaires aux directions des vîtesses des particules : l'orifice étant supposé infiniment petit par rapport aux différentes sections du fluide dans l'intérieur du vase, la vîtesse au sortir de l'orifice sera finie, & les vîtesses des tranches supérieures seront infiniment petites (194). Or, par la théorie de la chute des graves, si toutes les molécules fluides étoient abandonnées à l'action libre de leur pesanteur propre, elles descendroient avec la même vîtesse. Ainsi, puisque les tranches supérieures à l'orifice perdent la vîtesse qu'elles auroient naturellement par la pesanteur, le petit prisme d'eau (que je nomme *M*), qui sort à chaque instant, est pressé ou poussé par la liqueur supérieure, avec la même force que seroit poussé un piston que l'on mettroit en *pq*, pour empêcher

l'écoulement; c'est-à-dire (27), avec une force exprimée par $pq \times Rq$, en nommant 1 la pesanteur spécifique ou la densité du fluide.

Supposons que durant l'instant que la pression $pq \times Rq$ fait sortir le prisme ou la masse M, la pesanteur seule que je représente par la petite verticale Sq, fît sortir un prisme ou une masse m: on voit que les masses M & m sont poussées, en même temps, par les forces motrices $pq \times Rq$, $pq \times Sq$. Ainsi, en nommant V & u les vîtesses de ces masses, on aura, $MV : mu :: pq \times Rq : pq \times Sq :: Rq : Sq$. Or, les masses M & m sont comme leurs volumes, & ces volumes sont (191) comme les produits de l'orifice par les vîtesses; ce qui donne, $M : m :: pq \times V : pq \times u :: V : u$, & $MV : mu :: V^2 : u^2$. Donc $V^2 : u^2 :: Rq : Sq$.

Maintenant, soit U la vîtesse qu'acquerroit un corps grave, en tombant de la hauteur Rq; on aura, par la théorie de la chute des graves, $U^2 : u^2 :: Rq : Sq$. Donc $V^2 = U^2$, & $V = U$; ce qui est l'énoncé du Théorème.

Nous avertissons, en passant, que pour abréger le discours, on dit souvent que la vîtesse, au sortir de l'orifice, est dûe à la hauteur Rq *du fluide dans le réservoir; ou réciproquement, que la hauteur* Rq *est dûe à la vîtesse en* q. *Nous nous servirons de ces expressions.*

(196.) COROLLAIRE I. La même proposition a lieu pour un orifice latéral infiniment petit ; car la pression du fluide est égale (sous même profondeur) en toutes sortes de sens, & doit par conséquent produire la même vîtesse à la sortie de deux orifices très-petits, l'un horizontal, l'autre latéral, ces deux orifices étant supposés placés à la même distance de la surface supérieure de l'eau.

(197.) COROLLAIRE II. La liqueur, au sortir de l'orifice, a une vîtesse capable de la faire remonter à une hauteur égale à la distance verticale de l'orifice au plan horizontal qui rase la surface du fluide, de la même manière qu'un corps en tombant par sa pesanteur d'une certaine hauteur, acquiert une vîtesse capable de le faire remonter à cette hauteur.

(198.) COROLLAIRE III. On voit de même, par la théorie de la chute des graves, que si la vîtesse de la liqueur, au sortir de l'orifice, étoit continuée uniformément, la liqueur parcourroit un espace égal à $2\,Rq$, dans le même temps qu'un corps pesant emploîroit à tomber de la hauteur Rq.

(199.) *REMARQUE.* Nous n'avons pas besoin d'observer que la vîtesse du fluide, au sortir de l'orifice, sera toujours la même, sous la même hauteur Rq, quelle que soit l'espèce du fluide, puisqu'elle a constamment pour valeur la

vîteſſe dûe à la hauteur Rq. Ainſi M. Belidor ſe trompe, lorſqu'il dit *(Architecture Hydraulique, tome I, page 187)*, que les vîteſſes de deux liqueurs différentes, telles que du mercure & de l'eau, ſont entr'elles comme les racines carrées des produits des hauteurs par les peſanteurs ſpécifiques : ces vîteſſes ſont ſimplement entr'elles comme les racines carrées des hauteurs ; de ſorte que ſi les hauteurs deviennent égales, les vîteſſes ſeront auſſi égales. Si M. Belidor avoit remarqué, dans l'exemple qu'il donne *(n.° 490)*, qu'à la vérité la colonne qui chaſſe le mercure hors de l'un des vaſes, eſt quatorze fois auſſi peſante que la colonne qui chaſſe l'eau hors de l'autre vaſe ; mais qu'auſſi la maſſe chaſſée dans le premier cas, eſt quatorze fois auſſi grande que la maſſe chaſſée dans le ſecond ; il auroit vu ſans peine que la vîteſſe doit être la même dans les deux cas. En général, il eſt évident que lorſque les forces motrices ſont proportionnelles aux maſſes qu'elles mettent en mouvement, les vîteſſes ſont égales.

Je ſuppoſe toujours que les deux vaſes ſont placés dans un même endroit, ou du moins à la même latitude ſenſiblement. Mais ſi, par exemple, l'un étoit placé au pôle & l'autre à l'équateur, les vîteſſes ſeroient entr'elles comme les racines carrées des produits des hauteurs par les peſanteurs au pôle & à l'équateur. Ces peſanteurs peuvent s'exprimer par les nombres 289 & 288 reſpec-

tivement. Je ne fais cette remarque qu'en paſſant ; elle n'aura pas d'application dans la ſuite.

(200.) SCHOLIE. Le raiſonnement que nous avons fait (195) pour déterminer les vîteſſes des écoulemens, eſt fondé ſur ce principe, que la liqueur au ſortir de l'orifice eſt chaſſée par le poids *entier* de la colonne correſpondante, & ſuppoſe par conſéquent que l'orifice eſt infiniment petit. Cependant la plupart des Auteurs élémentaires, qui en cela ont preſque tous copié M. Varignon, avancent que la liqueur, au ſortir d'un orifice horizontal, eſt chaſſée par le poids de la colonne ſupérieure, ſans limiter la grandeur de l'orifice. Il eſt évident que la propoſition n'eſt pas vraie en général ; car ſi l'on a, par exemple, un vaſe cylindrique vertical rempli d'eau, & qu'on imagine que tout d'un coup le fond ſoit anéanti, la tranche du fond ne ſouffrira aucune action des tranches ſupérieures, & elles deſcendront toutes avec la même vîteſſe, ſuivant les loix de la chute des graves. La tranche du fond ne porte le poids total de la colonne ſupérieure, que quand les tranches ſupérieures perdent leurs vîteſſes, & que conſéquemment l'orifice eſt infiniment petit par rapport à elles (194).

Il eſt néanmoins eſſentiel de remarquer que ſi un orifice horizontal, quoique fini, eſt petit en comparaiſon de la largeur du réſervoir, que, par exemple, le rapport de la première ſurface à la

feconde, n'excède guère celui de 1 à 20; la vîteffe du fluide à la fortie de l'orifice, eft fenfiblement la même que fi cet orifice étoit infiniment petit. Mais alors cette vîteffe n'eft pas produite toute entière par la preffion de la colonne fupérieure. Chaque particule obéit à-la-fois à fa pefanteur propre & à l'action des particules contiguës, action qui eft fans ceffe favorifée ou contredite par leur adhérence réciproque. Or, on conçoit, fans qu'il foit peut-être poffible de le démontrer en rigueur, que toutes ces forces peuvent tellement fe combiner entr'elles, que la vîteffe de la liqueur, au fortir de l'orifice, foit la même que fi elle étoit produite par le poids de la colonne fupérieure. La chofe eft du moins indubitable par l'expérience. Seulement on obferve que fi l'orifice eft un peu confidérable, la vîteffe n'acquiert fa plénitude uniforme & permanente qu'au bout d'un certain temps; car on trouve alors que la quantité de liqueur qui fort pendant les trois ou quatre premières fecondes de l'écoulement, eft un peu moindre que celle qui fort pendant trois ou quatre autres fecondes de la fuite du temps. Plus l'orifice eft grand, plus cette inégalité fe fait apercevoir.

(201.) PROBLÈME I. *Le vafe* ABCD *qui donne de l'eau par le petit orifice* pq, *horizontal ou latéral, étant fuppofé entretenu plein à la même hauteur* Rq *au-deffus de cet orifice, au moyen d'une eau affluente qui remplace continuellement celle qui fort; on demande une équation qui contienne la relation entre*

la quantité d'eau écoulée, l'aire de l'orifice, le temps de l'écoulement & la hauteur Rq.

Nommons K l'aire de l'orifice pq; t, le temps de l'écoulement; h, la hauteur constante Rq de l'eau dans le vase, au-dessus de l'orifice; Q, la quantité d'eau écoulée pendant le temps t; θ, le temps *donné* qu'un corps grave met à tomber de la hauteur a, donnée. Si l'on fait cette proportion, $\sqrt{a} : \sqrt{h} :: \theta$: un quatrième terme, ce quatrième terme $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ sera le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur h. Or, durant ce même temps, il doit sortir (198) une colonne fluide qui a l'aire K pour base & $2h$ pour hauteur, puisque la hauteur h est constante, & que par conséquent la vîtesse, au sortir de l'orifice, demeure toujours la même. Ainsi la colonne, ou quantité de fluide, qui sort pendant le temps $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$, est exprimée par $2Kh$. Maintenant, il est clair que les quantités de fluide, qui sortent pendant les temps $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}}$ & t, sont entr'elles comme ces temps; ce qui donne la proportion, $\frac{\theta\sqrt{h}}{\sqrt{a}} : t :: 2Kh : Q$; d'où l'on tire $\theta Q = 2tK\sqrt{a}.\sqrt{h}$, qui est la formule demandée.

(202.) COROLLAIRE I. Des six quantités que cette formule renferme, deux, savoir θ & a, sont toujours données; & nous supposerons, d'après l'expérience, que a étant $= 15,1$ pieds, $\theta = 1''$. Mais les quatre autres quantités, K, t, h, Q,

peuvent varier ; & on voit que trois d'entr'elles étant données, on connoîtra la quatrième : de-là résulte la solution des questions suivantes.

I. *Connoissant* K, t, h, *trouver* Q !

Cette question se résout par l'éq. $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$.

Par exemple, supposons que la hauteur h de l'eau dans le réservoir soit de 12 pieds ; que l'orifice, supposé circulaire, ait 1 pouce de diamètre, & que l'écoulement dure une minute. En mettant ces données dans l'équation précédente, mettant aussi pour a, 15,1 pieds, & pour θ, 1 seconde : on trouvera $Q = 15216$ pouces cubes, à peu de chose près. Si on veut connoître le poids de cette quantité d'eau, on fera la proportion, 1728 pouces cubes sont à 15216 pouces cubes, comme 70 livres, poids du pied cube d'eau douce, ou de 1728 pouces cubes, sont au poids cherché, qu'on trouvera de 616 livres environ.

II. *Connoissant* h, t, Q, *trouver* K !

Cette question se résout par l'éq. $K = \frac{\theta Q}{2t\sqrt{ah}}$.

Par exemple, soient $t = 1$ minute, $Q = 8$ pieds cubes, ou 13824 pouces cubes, $h = 9$ pieds : on trouvera que K vaut à peu-près la fraction décimale 0,824 d'un pouce carré.

Si l'orifice doit être un cercle, on aura (en nommant r son rayon), $r = \sqrt{\frac{7}{22}K}$, la fraction $\frac{7}{22}$ exprimant le rapport du diamètre à la circonférence ;

ce qui donne dans le cas présent, $r = 6\frac{1}{10}$ lignes environ.

III. *Connoissant* h, K, Q, *trouver* t?

Cette question se résout par l'éq. $t = \frac{\theta Q}{2K\sqrt{ah}}$.

Par exemple, supposons $h = 9$ pieds, $K = 1$ pouce carré, $Q = 40000$ pouces cubes : on trouvera $t = 143{,}05$ secondes $=$ 2 minutes 23 secondes à peu-près.

IV. *Connoissant* Q, K, t, *trouver* h?

Cette question se résout par l'éq. $h = \frac{Q^2\theta^2}{4at^2K^2}$.

Par exemple, soient $Q = 40000$ pouces cubes, $K = 1$ pouce carré, $t = 4$ minutes $= 240$ secondes : on trouvera $h = 3$ pieds 2 pouces 3 lignes $\frac{3}{5}$ à peu-près.

(203.) COROLLAIRE II. *Les quantités* Q *&* Q' *de liqueur, qui sortent dans le même temps par les orifices* K *&* K', *sous les hauteurs ou charges constantes* h *&* h', *sont entr'elles comme les produits des orifices par les racines carrées des hauteurs.*

Car on a les deux équations $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$, $Q' = \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{\theta}$, lesquelles donnent, $Q : Q' :: K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$. Ainsi connoissant, par l'expérience, tout ce qui est relatif à l'un des écoulemens, on pourra déterminer tout ce qui est relatif à l'autre.

Par exemple, l'expérience m'a appris qu'un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, percé dans une mince paroi, sous 4 pieds de charge, donne 5436 pouces cubes d'eau : si je veux savoir ce que donnera un orifice de 2 pouces de diamètre, sous 9 pieds de charge, je ferai la proportion, $1 \times \sqrt{4} : 4 \times \sqrt{9} :: 5436$ pouces cubes : $x = 32616$ pouces cubes d'eau.

On observera que la contraction de la veine fluide affecte semblablement les écoulemens par deux orifices de même nature, c'est-à-dire, ou tous deux percés dans une mince paroi, ou tous deux appartenans à des tuyaux additionnels ; de sorte qu'alors on peut faire abstraction de l'effet de la contraction dans la proportion, $Q : Q' :: K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$. Mais si l'un des écoulemens se fait par un orifice percé dans une mince paroi, l'autre par un tuyau additionnel, il faut, pour avoir égard à la contraction dans la proportion précédente, diminuer le premier orifice dans le rapport de 8 à 5, ou de 16 à 10 ; & le second dans le rapport de 8 à $6\frac{1}{2}$, ou de 16 à 13.

(204.) PROBLÈME II. *Le vase* ABCD (Fig. 4) *étant supposé se vider par le petit orifice* pq, *sans recevoir de nouvelle eau : on demande le temps que la surface de l'eau mettra à descendre de la hauteur donnée* Rk, *pour prendre la position* KH ? Fig. 4.

Supposons qu'au bout d'un certain temps, la surface de la liqueur soit parvenue dans la position

indéterminée Mm. Qu'on mène parallèlement à ce plan le plan infiniment voisin Nn. Il est évident 1.° que durant l'instant que Mm descend en Nn, il sort par l'orifice pq une quantité d'eau égale à la tranche $MmnN$, qu'on peut regarder comme un prisme dont Mm est la base & Ll la hauteur, & qui a par conséquent pour valeur $Mm \times Ll$. 2.° Que durant ce même instant, la hauteur verticale Lq de Mm au-dessus de l'orifice, peut être regardée comme constante, puisqu'elle diminue seulement de la quantité infiniment petite Ll, qu'on peut négliger par rapport à elle. D'où il suit (202, *Quest. III*), qu'en nommant K l'aire de l'orifice pq, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur a; l'expression de l'instant ou du temps élémentaire employé à parcourir Ll sera $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{a}.\sqrt{Lq}}$. Il ne s'agit plus que de trouver la somme de tous ces temps élémentaires, correspondans à la hauteur donnée Rk.

Sur la droite IS, égale & parallèle à Rq, comme axe, & avec un paramètre donnée p, construisez une parabole SFT; prolongez indéfiniment les sections AD, Mm, Nn, KH, du vase, pour avoir les ordonnées correspondantes IT, Vu, Gg, EF, de la parabole ; construisez une seconde courbe XZY, telle que chacune de ses ordonnées Va soit égale au quotient de la section Mm divisée par l'ordonnée Vu de la parabole : alors le temps employé à parcourir Rk sera égal au

produit de la quantité constante $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}}$ par l'aire *IEZX*. Car, puisqu'on a par construction, $Va = \frac{Mm}{Vu}$, & par la propriété de la parabole, $\sqrt{VS}$, ou $\sqrt{Lq} = \frac{Vu}{\sqrt{p}}$: le temps élémentaire $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{a}\,.\,\sqrt{Lq}}$ deviendra (en mettant $Va \times Vu$ pour Mm, $\frac{Vu}{\sqrt{p}}$ pour $\sqrt{Lq}$, VG pour Ll), $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times Va \times VG$; expression qui est le produit de la quantité constante $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}}$ par l'élément $VabG$ de l'aire *IEZX*. Donc (en désignant par $T.Rk$ le temps correspondant à Rk), on aura, $T.Rk = \frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times IEZX$.

(205.) COROLLAIRE I. Les quantités a, θ, p, K, étant constantes, il est clair que les temps employés à parcourir les hauteurs RL, Lk, sont entr'eux comme les aires correspondantes $IVaX$, $VEZa$. Donc si ces aires sont égales, ou en raison donnée, les temps seront égaux, ou en raison donnée.

Supposons, par exemple, que le vase *ABCD* soit un solide produit autour de l'axe Rq, par la révolution d'une courbe parabolique DHq, dont la propriété est que les carrés de ses ordonnées RD, Lm, kH sont entr'eux comme les racines carrées des abscisses correspondantes qR, qL, qk.

Alors les sections circulaires AD, Mm, KH du vase, qui sont entr'elles comme les carrés de leurs rayons RD, Lm, kH, seront entr'elles comme les racines carrées des abscisses qR, qL, qk, ou comme les ordonnées IT, Vu, EF de la parabole SFT. Donc tous les quotiens $\frac{AD}{IT}$, $\frac{Mm}{Vu}$, $\frac{KH}{EF}$ sont égaux ; ce qui donne pour XZY une droite verticale : donc les parties de la hauteur Rk étant supposées égales, seront parcourues en temps égaux.

(206.) COROLLAIRE II. Connoissant la hauteur Rk, on connoît l'espace $AKHD$, puisque la figure du vase est donnée ; & comme on vient de trouver le temps que le fluide met à s'abaisser de AD en KH, il s'ensuit que l'on connoît la quantité de liqueur qui sort durant ce même temps.

(207.) *REMARQUE.* Dans la solution du Problème précédent, j'ai employé des constructions géométriques, pour la rendre plus élémentaire & pour la mettre à la portée d'un plus grand nombre de Lecteurs. Mais, en y appliquant le calcul intégral, la solution est beaucoup plus expéditive. En effet, si l'on suppose la hauteur Rq primitive & donnée du fluide $= h$, $RL = x$, la section $Mm = X$, fonction de x, donnée par la figure du vase ; il est clair que Lq étant la hauteur dûe à la vîtesse du fluide, quand la surface est parvenue en Mm, il est clair, dis je,

dis-je (201), que la quantité élémentaire d'eau qui ſort pendant l'inſtant dt, eſt exprimée par $\frac{2Kdt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$. Or, cette même quantité $=$ la tranche $MmnN = Xdx$. On aura donc, $dt = \theta \times \frac{Xdx}{2K\sqrt{a}.\sqrt{(h-x)}}$; équation qu'on intégrera, ſoit exactement, ſoit par les quadratures des courbes, après y avoir ſubſtitué pour X ſa valeur donnée en conſtantes & en x dans chaque cas particulier.

Par exemple, ſoit RqD une parabole ordinaire, qui en tournant autour de ſon axe Rq produit le vaſe $ABCD$. Nommons p le paramètre de cette parabole, Π le rapport de la circonférence au diamètre : la tranche $MmnN$ ou x ſera $= \Pi.p(h-x)$, & on aura $dt = \frac{\theta\Pi p}{2K\sqrt{a}} \times dx\sqrt{(h-x)}$, dont l'intégrale eſt $t = C - \frac{\theta\Pi p}{2K\sqrt{a}} \times \frac{2(h-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$. La conſtante C doit être telle qu'en faiſant $x = 0$, on ait $t = 0$; ce qui donne $C = \frac{\theta\Pi ph\sqrt{h}}{3K\sqrt{a}}$. Donc $t = \frac{\theta\Pi p[h\sqrt{h}-(h-x)\sqrt{(h-x)}]}{3K\sqrt{a}}$.

(208.) SCHOLIE. Dans l'état phyſique des choſes, quand la ſurface du fluide approche de l'orifice, il ſe forme au-deſſus de cet orifice une eſpèce d'entonnoir dans lequel l'air s'introduit; ce qui empêche en partie le fluide de ſortir, &

dénature l'écoulement. La formule précédente ne peut donc servir à déterminer l'écoulement que jusqu'au moment où l'entonnoir commence à se former; ce qui arrive pour l'ordinaire lorsque la surface du fluide est à 3 ou 4 pouces de l'orifice.

(209.) PROBLÈME III. *Le vase* ABCD
Fig. 5. (Fig. 5), *étant supposé prismatique ou cylindrique: on demande le temps que la liqueur mettra à s'abaisser de* AD *en* KH!

On voit que ce problème peut être résolu très-simplement, par le moyen de l'article 207. Mais en voici une solution élémentaire, suivant les principes de l'article 204.

Imaginons qu'un corps non pesant soit poussé de bas en haut, suivant la verticale qR, par une force accélératrice constante qui lui imprime les mêmes degrés de vîtesse que la pesanteur imprime à un corps qui tombe librement; de manière que le corps ascendant parcourt l'espace qR, suivant la même loi & dans le même temps que le corps descendant par la pesanteur parcourroit l'espace Rq. Il est clair que les différentes vîtesses du corps ascendant étant proportionnelles aux racines carrées des espaces parcourus correspondans, de même que celles du corps descendant, pourront être exprimées par les ordonnées de la parabole SFT. Supposons que le corps ascendant étant arrivé en l, il parcoure le petit espace lL ou GV durant un temps infiniment petit, avec la vîtesse représentée

par l'ordonnée correſpondante Vu de la parabole. Pour trouver l'expreſſion de ce temps élémentaire, je conſidère que, ſuivant la théorie de la chute des graves, le temps total employé à parcourir qR eſt $\frac{\theta \sqrt{qR}}{\sqrt{a}}$; & que ſi la vîteſſe finale du corps aſcendant étoit continuée uniformément, ce corps parcourroit, durant ce même temps $\frac{\theta \sqrt{qR}}{\sqrt{a}}$, un eſpace $= 2qR$. Or, dans les mouvemens uniformes, les eſpaces diviſés par les vîteſſes, ſont entr'eux comme les temps; donc (en déſignant le temps par le caractériſtique T, placée au-devant de l'eſpace parcouru), nous aurons la proportion: $\frac{2qR}{IT} : \frac{GV}{Vu} :: \frac{\theta \sqrt{qR}}{\sqrt{a}} : T.GV$; ce qui donne $T.GV = \frac{\theta \times GV \times IT}{2 Vu \times \sqrt{a} \times \sqrt{qR}}$, ou bien (en mettant pour $\sqrt{qR}$ ſa valeur $\frac{IT}{\sqrt{p}}$), $T.GV = \frac{\theta \sqrt{p}}{\sqrt{a}} \times \frac{GV}{2Vu}$. Comparant ce petit temps avec le petit temps $\frac{\theta \sqrt{p}}{2K\sqrt{a}} \times Va \times VG$, que la ſurface de l'eau emploie à parcourir le même eſpace Ll ou VG (204); & conſidérant que $Va = \frac{Mm}{Vu}$, par conſtruction: on verra que le premier eſt au ſecond, dans le rapport conſtant de l'aire K de l'orifice à l'aire de la ſection Mm du vaſe, laquelle eſt par-tout de la même étendue, puiſque le vaſe eſt ſuppoſé priſmatique. Le même rapport ayant

lieu entre les autres temps élémentaires que le corps ascendant & la surface de l'eau emploient à parcourir des petits espaces égaux, on conclura que le temps total, employé par le corps ascendant à parcourir la hauteur qR, est au temps total que le vase mettroit à se vider entièrement, comme l'aire K est à l'aire de la base BC que je nomme A. Ainsi le temps que le vase $ABCD$ met à se vider entièrement est $\frac{\theta\sqrt{Rq}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$.

En regardant $KBCH$ comme le vase proposé, on démontrera de la même manière que le temps employé par ce vase à se vider entièrement, est $\frac{\theta\sqrt{kq}}{\sqrt{a}} \times \frac{A}{K}$. Or le temps que la surface de l'eau met à s'abaisser de AD en KH, est évidemment égal à la différence des deux temps dont on vient de parler. Donc, $T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$.

(210.) COROLLAIRE I. Notre équation $T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$, fournit la manière de construire une *horloge d'eau*, ou une *clepsydre*, de forme cylindrique. Par exemple, qu'il s'agisse de partager la hauteur AB, en douze parties qui soient parcourues en temps égaux par la surface du fluide: on représentera AB par 144, carré de 12; de ces 144 parties égales qui composent AB, on retranchera 121, carré de 11; le reste 23 fera connoître la première partie cherchée AM; de 121, on retranchera 100, carré de 10, le reste

21 fera connoître la feconde partie cherchée ; de 100, on retranchera 81, carré de 9, le refte 19 fera connoître la troifième partie, &c. D'où l'on voit que les parties fucceffives de la hauteur qu'on demande, font exprimées par la fuite des nombres 23, 21, 19, 17, 15, &c.

Quant à la mefure précife du temps employé à parcourir chaque partie de la hauteur AB, on le déterminera par notre formule. Ainfi, fi l'on veut que ce temps $=$ 1 heure, on fera $t =$ 1 heure ; & il faudra tellement proportionner la bafe A & la hauteur h du vafe avec l'aire K de l'orifice, qu'on ait, 1 heure $= \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{121}{144}h})}{K\sqrt{a}}$, ou 1 heure $= \frac{\theta A\sqrt{h}}{12K\sqrt{a}}$. On voit par cette équation, que deux des trois quantités A, h, K, étant données, on trouvera la troifième.

Dans l'ufage de ces fortes de clepfydres, on aura foin, conformément à la remarque de l'article 208, de ne pas attendre que la furface du fluide s'approche trop près du fond, ou de n'employer, par exemple, que les onze premières divifions.

(211.) Corollaire II. Si l'on a un vafe prifmatique $ABCD$, plein jufqu'en AD, & qu'on lui permette de fe vider entièrement ; qu'enfuite l'ayant rempli de nouveau jufqu'en AD, on l'entretienne conftamment plein à cette hauteur, tandis qu'il fort de l'eau par l'orifice pq : il fortira dans ce fecond cas une quantité d'eau, double de

celle qui est contenue dans l'espace $ABCD$, pendant le même intervalle de temps que le vase a mis d'abord à se vider entièrement, abstraction faite de l'entonnoir. Car, dans le premier cas, le temps que le vase met à se vider entièrement, est exprimé par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$ (209). Or (201) la quantité de liqueur qui s'écoule dans le second cas, pendant le temps $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}}$, est exprimée par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{a}} \times \frac{2K\sqrt{ah}}{\theta} = 2A \times h$, quantité double du prisme $ABCD$ qui est égal à $A \times h$.

(212.) COROLLAIRE III. Lorsqu'on voudra comparer ensemble les temps des écoulemens de deux vases prismatiques qui se vident, on observera qu'en désignant pour le second vase les quantités analogues à Rq, kq, Rk, A, K, par les mêmes lettres accentuées, on a les deux équations, $T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$, $T.R'k' = \frac{\theta A'(\sqrt{R'q'} - \sqrt{k'q'})}{K'\sqrt{a}}$; d'où l'on tire, $T.Rk : T.R'k' :: \frac{A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K} : \frac{A'(\sqrt{R'q'} - \sqrt{k'q'})}{K'}$. Ainsi les temps employés par les surfaces des eaux à parcourir les hauteurs Rk, $R'k'$, sont entr'eux comme les produits des bases des prismes par les différences des racines carrées des hauteurs premières & des hauteurs

dernières des eaux dans les réservoirs, divisés par les aires des orifices.

On fera ici, par rapport aux effets de la contraction de la veine fluide, une remarque analogue à celle qui termine l'article 203.

(213.) COROLLAIRE IV. Si un vase prismatique contenoit des fluides de différentes espèces, on détermineroit l'écoulement de la même manière. Car soit, par exemple, le vase $ABCD$ (*Fig. 6*), qui contient trois fluides différens $BFLC$, $FEGL$, $EADG$, lesquels sont supposés ne pouvoir se mêler ensemble, les plus légers étant posés sur les plus pesans. Que ce vase se vidant par l'orifice pq, la surface du fluide inférieur parvienne en un certain temps t dans la position OP. Soient p, p', p'' les pesanteurs spécifiques de ces trois fluides. On voit (34), que la pression, qui produit l'écoulement par l'orifice pq, est la même que si, à la place des deux fluides supérieurs, on substituoit des fluides de même espèce que $BFLC$, & dont les hauteurs fussent $\frac{p' \times FE}{p}$, $\frac{p'' \times EA}{p}$. La question est donc de déterminer le temps de l'écoulement d'un seul fluide, pareil à $BFLC$, & dont la hauteur au premier instant du temps t est $BF + \frac{p' \times FE}{p} + \frac{p'' \times EA}{p}$. Nommons H cette hauteur; & h la hauteur dernière, ou celle qui répond à la fin du Fig. 6.

temps t que le fluide a mis à parcourir l'espace $H - h$. On aura (en conservant les autres dénominations de l'article 209), $t = \frac{\theta A (\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K \sqrt{a}}$; & pour avoir le temps que notre fluide fictif met à parcourir la hauteur FB, ou ce qui revient au même, le temps que le fluide inférieur $BFLC$ met à sortir entièrement, il faudra faire dans l'expression précédente, $H - h = BF$, ou $h = H - BF = \frac{p' \times FE}{p} + \frac{p'' \times EA}{p}$.

Le fluide inférieur étant sorti, nous pourrons concevoir que le fond du vase est FL, & que l'orifice $p\,q$ est percé dans ce fond. Alors, en changeant le fluide supérieur $EADG$ en une autre de même espèce que $FEGL$, on trouvera que l'expression du temps t, que le fluide $FEGL$ met à sortir entièrement, est $t = \frac{\theta A (\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K \sqrt{a}}$, en faisant dans cette expression $H = FE + \frac{p'' \times EA}{p'}$; $h = \frac{p'' \times EA}{p'}$; ainsi de suite, quel que soit le nombre des fluides.



CHAPITRE III.

De l'écoulement des eaux par un petit orifice de figure donnée, lorſque tous les points de cet orifice ne peuvent pas être ſuppoſés également diſtans du plan de la ſurface du fluide.

(214.) DANS la pratique, les eaux ſortent ſouvent par des ouvertures latérales qui, quoique petites en comparaiſon des amplitudes ou ſections horizontales des réſervoirs, ne peuvent pas cependant être cenſées avoir tous leurs points à égales diſtances de la ſurface du fluide. Tels ſont, par exemple, les pertuis des moulins. Alors la méthode ordinaire eſt de déterminer l'écoulement d'après ce raiſonnement. Concevons d'abord que l'orifice ſoit bouché par une plaque, & qu'enſuite on perce cette plaque d'une infinité de trous par leſquels l'eau s'échappe. En regardant chacun de ces trous comme un orifice particulier & iſolé, la vîteſſe en cet endroit ſeroit dûe à la hauteur correſpondante du fluide; donc, ajoute-t-on, ſi l'on multiplie le nombre des trous à l'infini, ou, ce qui revient au même, ſi l'on imagine que la plaque entière ſoit ôtée, la vîteſſe en chacun des points de l'orifice propoſé, ſera dûe à la hauteur correſ-

pondante du fluide; & dans la détermination de la quantité d'eau écoulée, il faudra avoir égard à cette inégalité des vîtesses. Mais on ne peut pas se dissimuler que ce raisonnement n'est rien moins que démonstratif. Tant que la somme des petits trous percés dans la plaque substituée à l'orifice, est fort petite en comparaison de l'amplitude du réservoir, les portions de liqueur qui sortent par chaque trou, sont chassées par les poids absolus des colonnes supérieures, & l'écoulement se fait comme dans l'article 201. Mais du moment que le nombre des trous augmente à l'infini, & que les filets deviennent contigus les uns aux autres, on ne voit pas clairement qu'ils doivent sortir de la même manière qu'ils sortiroient par de petits trous isolés. Cependant comme cette hypothèse donne des résultats assez conformes à l'expérience, je la prendrai d'autant plus volontiers pour base dans les Problèmes suivans, qu'elle mène à des calculs fort simples, & que dans les questions usuelles, il faut rechercher cette simplicité autant qu'il est possible sans violer les droits sacrés de l'exactitude.

(215.) PROBLÈME I. *Exposer en général la manière de déterminer les écoulemens par des ouvertures latérales dont tous les points ne peuvent pas être supposés également distans de la surface du fluide?*

En supposant, d'après ce qui vient d'être dit, que dans les écoulemens de ce genre, la vîtesse de chaque point de l'orifice soit égale à celle qu'un

corps grave acquerroit en tombant de la hauteur du fluide, correſpondante à ce point ; nous imaginerons que l'orifice propoſé ſoit partagé en une infinité de rectangles ou de trapèzes par des plans horizontaux ; & regardant chacun de ces trapèzes élémentaires, comme un orifice particulier, dont tous les points peuvent être ſuppoſés également diſtans de la ſurface du fluide, on déterminera (201) la quantité de liqueur qu'il doit fournir pendant un temps donné. Enſuite il ne s'agira plus que de trouver la ſomme de toutes ces quantités élémentaires de fluide, pour avoir la quantité totale que l'orifice entier doit donner pendant le même temps.

Faiſons quelques applications de ces principes généraux.

(216.) PROBLÈME II. *Déterminer* (Fig. 7.) *la quantité* Q *d'eau qui ſort en un temps donné par un orifice rectangulaire vertical* L N O M, *d'un vaſe* A B C D *entretenu plein d'eau à la hauteur conſtante* R V ! Fig. 7.

Menez parallèlement aux baſes oppoſées & horizontales *L M, N O* de l'orifice, les droites infiniment voiſines *XZ*, *xz*, qui déterminent le rectangle élémentaire *X Z z x* de la ſurface de l'orifice. Il eſt évident que tous les points de ce rectangle peuvent être cenſés à la même diſtance de la ſurface du fluide. Nous ſuppoſons qu'à chacun d'eux répond une vîteſſe dûe à la hauteur *R I*. Ainſi (en nommant *t* le temps de l'écoulement ;

θ, le temps de la chute d'un corps grave par la hauteur a), la quantité d'eau qui sortira, pendant le temps t, par le rectangle $XZzx$, sera exprimée (201) par $\frac{2 XZ \times Ii \times t\sqrt{a} \times \sqrt{RI}}{\theta}$, ou par $\frac{2 XZ \times t\sqrt{a}}{\theta} \times Ii \times \sqrt{RI}$. La question est de trouver la somme de toutes ces quantités élémentaires d'eau, afin d'avoir la quantité totale qui s'écoule par l'orifice fini $LNOM$.

Pour cela, je construis sur l'axe RV, avec un paramètre quelconque p, la parabole RT; & je prolonge les droites KM, IZ, iz, VO, jusqu'en Y, S, s, T. Le petit trapèze parabolique $ISsi$ (qu'on peut regarder comme un rectangle, dont IS est la base & Ii la hauteur) a pour expression $Ii \times IS$. ou bien (à cause de $IS = \sqrt{RI} \times \sqrt{p}$), $Ii \times \sqrt{RI} \times \sqrt{p}$. Donc (en nommant e ce trapèze; q la quantité élémentaire d'eau qui sort par le rectangle $XZzx$), on aura, $e : q :: Ii \times \sqrt{RI} \times \sqrt{p} : \frac{2 XZ \times t\sqrt{a}}{\theta} \times Ii \times \sqrt{RI}$; ce qui donne $q = e \times \frac{2 XZ \times t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$. D'où l'on voit que si l'on parvient à trouver la somme des e, c'est-à-dire, la surface parabolique $KVTY$, on aura la somme des q, c'est-à-dire, la quantité totale Q d'eau écoulée par l'orifice $LNOM$, en multipliant l'aire parabolique $KVTY$, par la fraction constante & donnée $\frac{2 XZ \times t\sqrt{a}}{\theta\sqrt{p}}$.

Ayant achevé le rectangle $RVTH$, & ayant mené les droites SG, sg parallèles à VR, j'observe que le triligne parabolique extérieur RHT est composé d'élémens SG, sg, qui sont proportionnels (par la propriété de la parabole) aux carrés des parties correspondantes RG, Rg, de la droite RH; donc ces élémens croissent comme les tranches d'une pyramide qui auroit son sommet en R, & RH pour hauteur : d'où il suit que la somme des GS, ou l'aire RHT, est égale au tiers du produit de la hauteur RH par la droite HT qui est la dernière des GS. Ainsi l'espace $RHT = \frac{RH \times HT}{3} = \frac{VR \times VT}{3}$; & par conséquent l'espace parabolique intérieur $RVT = \frac{2}{3} RV \times VT$. Semblablement l'espace parabolique $RKY = \frac{2}{3} RK \times KY$. Par conséquent l'espace cherché $KVTY = \frac{2}{3} (RV \times VT - RK \times KY)$. Nous aurons donc $Q = \frac{2}{3} (RV \times VT - RK \times KY) \times \frac{2\, XZ \times t \sqrt{a}}{\theta \sqrt{p}}$; ou bien (en mettant pour VT sa valeur $\sqrt{VR} \times \sqrt{p}$; pour KY, sa valeur $\sqrt{RK} \times \sqrt{p}$; & supposant $VR = H$; $RK = h$; $XZ = f$), $Q = \frac{4 f . t \sqrt{a} . (H\sqrt{H} - h\sqrt{h})}{3\theta}$, expression dans laquelle tout est connu.

On voit que parmi les sept quantités que cette

équation renferme, θ & a sont toujours les mêmes, mais que les cinq autres Q, H, h, f, t, peuvent varier, & que quatre d'entr'elles étant données, on pourra trouver celle qui est inconnue ; ce qui fournit des questions analogues à celles qui sont l'objet de l'article 202.

(217.) COROLLAIRE. Soit nommée x la hauteur *moyenne* de l'eau au-dessus de l'orifice, c'est-à-dire, une hauteur telle que si tous les filets d'eau sortoient avec une seule & même vîtesse égale à celle que peut acquérir un corps grave en tombant de la hauteur x, il s'écoulât pendant le temps t la même quantité d'eau qu'il s'en écoule avec les vîtesses naturelles dans l'hypothèse du problème : on aura (201), $Q = \frac{2tf(H-h)\sqrt{ax}}{\theta}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q, & dégageant x, on trouvera $x = \frac{4(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}$. Cette hauteur moyenne diffère de la verticale qu'on éleveroit du centre de gravité de l'orifice $LNOM$ à la surface de l'eau, & qui auroit par conséquent pour valeur, $\frac{H+h}{2}$. Mais plus la surface de l'eau est élevée au-dessus de la base supérieure LM de l'orifice (toutes choses d'ailleurs égales), plus la différence dont il s'agit diminue. En effet, à mesure que KR augmente ; tout le reste demeurant le même, l'arc YST approche de plus en plus d'une ligne droite, & le segment parabolique

KVTSY d'un trapèze rectiligne. Or si le segment parabolique devenoit réellement un trapèze rectiligne, l'ordonnée moyenne ou la vîtesse moyenne de l'eau répondroit au milieu de *KV*. Donc aussi la hauteur moyenne répondroit au même point.

(218.) *REMARQUE.* Si pour résoudre le problème précédent on employoit le calcul intégral, on auroit (en supposant $RI = z$), q ou $dQ = \frac{2tfdz\sqrt{z}.\sqrt{a}}{\theta}$, dont l'intégrale est $Q = \frac{4tfz^{\frac{3}{2}}.\sqrt{a}}{3\theta} + C$. La constante C doit être telle que $z = h$, donne $Q = 0$; ce qui donne $C = -\frac{4tfh^{\frac{3}{2}}.\sqrt{a}}{3\theta}$. Donc en général $Q = \frac{4tf(z^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}).\sqrt{a}}{3\theta}$; & faisant $z = H$, on aura $Q = \frac{4tf(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}).\sqrt{a}}{3\theta}$ pour l'expression de la quantité d'eau qui sort pendant le temps t par l'orifice entier *LNOM*.

(219.) PROBLÈME III. *Déterminer la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné par l'orifice triangulaire vertical* NKO (Fig. 8.) *d'un vase* ABCD, *entretenu constamment plein, la base* NO *de cet orifice étant supposée horizontale!* Fig. 8.

Par le sommet *K* du triangle *KNO*, menez la verticale *RKV*, qui partage ce triangle en deux triangles rectangles *KVO*, *KVN*; menez ensuite

les deux horizontales infiniment voisines XZ, xz; ce qui nous donne le petit orifice élémentaire $XZzx$ pour le triangle KVO.

Soient la hauteur totale RKV de l'eau dans le réservoir $= H$; la hauteur $RK = h$; $RX = z$; $VO = m$; la quantité élémentaire d'eau qui sort pendant le temps t par l'orifice $XZzx = dQ$; le temps par la chute donnée $a = \theta$. On aura $XZ = \frac{m(z-h)}{H-h}$;

& $dQ = \frac{2tm(z-h).dz.\sqrt{z}.\sqrt{a}}{(H-h)\theta}$, dont l'intégrale est

$$Q = \frac{4tm.z^{\frac{5}{2}}\sqrt{a}}{5(H-h)\theta} - \frac{4tmh.z^{\frac{3}{2}}\sqrt{a}}{3(H-h)\theta} + C.$$

La constante C doit être telle que $z = h$, donne $Q = 0$; donc $C = \frac{8tm.h^{\frac{5}{2}}.\sqrt{a}}{15(H-h)\theta}$; & en général,

$Q = \frac{4tm(2h^{\frac{5}{2}} + 3z^{\frac{5}{2}} - 5hz^{\frac{3}{2}}).\sqrt{a}}{15(H-h)\theta}$. Faisant $z = H$,

on aura $Q = \frac{4tm(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5h.H^{\frac{3}{2}}).\sqrt{a}}{15(H-h)\theta}$,

pour la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t par l'orifice partiel KVO.

Il est clair que si l'on suppose $VN = n$; & qu'on substitue n pour m dans la formule précédente, elle exprimera la quantité d'eau Q' qui sort par l'orifice partiel KVN. Donc, en faisant NO ou $m + n = c$, on aura, $Q + Q'$

$= \frac{4tc(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}}).\sqrt{a}}{15(H-h)\theta}$, pour

l'expression

l'expression de la quantité d'eau qui sort, pendant le temps t, par l'orifice entier KNO.

(220.) COROLLAIRE. Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice : on aura (201), $Q = \frac{tc(H-h).\sqrt{x}.\sqrt{a}}{\theta}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q, & dégageant x, il viendra $x = \frac{16(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}})^2}{225(H-h)^4}$. Cette expression diffère de celle de la distance du centre de gravité du triangle à la surface du fluide, qui a pour valeur $h + \frac{2}{3}(H-h)$, ou $\frac{2H+h}{3}$. Mais la différence est peu sensible, quand la surface de l'eau est un peu élevée au-dessus de l'orifice, & on peut alors supposer $x = \frac{2H+h}{3}$, pour abréger le calcul.

(221.) SCHOLIE. Si la pointe du triangle étoit en bas & la base en haut (*Fig.* 9.*) on trouveroit (en faisant $RK = H$, $RV = h$, $NO = c$, & procédant d'ailleurs de même), que la quantité d'eau qui sort, pendant le temps t, par l'orifice KNO, a pour valeur Fig. 9.

$$\frac{4tc(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}})\sqrt{a}}{15(H-h)\theta}.$$

Et en nommant x la hauteur moyenne de l'eau, on auroit $x = \frac{16(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}})^2}{225(H-h)^4}$.

(222.) PROBLÈME IV. *Déterminer la quantité d'eau qui sort pendant un temps donné, par l'orifice*
Fig. 10. *circulaire vertical* KMVN (Fig. 10) *d'un vase entretenu constamment plein !*

Soient RV, RK les hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir, au-dessus des points le plus bas & le plus haut de l'orifice. Ayant mené au diamètre vertical KV, les ordonnées infiniment voisines PM, pm, tirez le rayon OM.

Nommons t le temps donné; θ le temps par la chute donnée a; Q la quantité d'eau écoulée; r le rayon OK; z l'angle KOM pour le rayon 1; π le rapport de la circonférence au diamètre; n le rapport de la hauteur RO de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, au rayon OK, en sorte que $RO = nr$. On aura, $PM = r$ sin. z; $OP = r$ cos. z; $RP = nr - r$ cos. z; $Pp = d(KP) = rdz$ sin. z; le petit trapèze $PMmp = r^2 dz$ (sin. $z)^2$. Donc (201), $dQ = \frac{t\sqrt{a}}{\theta} \times 2r^2 dz$ (sin. $z)^2 \cdot \sqrt{(nr - r \text{cos. } z)}$.

Pour parvenir à intégrer cette équation, on observera que dz (sin. $z)^2 \sqrt{[n - \text{cos. } z]} = dz [1 - (\text{cos. } z)^2] \sqrt{[n - \text{cos. } z]} = dz$

$$[1 - (\text{cos. } z)^2] \times [n^{\frac{1}{2}} - \frac{n^{-\frac{1}{2}} \text{cos. } z}{2} - \frac{n^{-\frac{3}{2}} (\text{cos. } z)^2}{8} - \frac{n^{-\frac{5}{2}} (\text{cos. } z)^3}{16}$$

$$- \frac{5 n^{-\frac{7}{2}} (\text{cof.}\, z)^4}{128} - \frac{7 n^{-\frac{9}{2}} (\text{cof.}\, z)^5}{256}$$

$$- \frac{63 n^{-\frac{11}{2}} (\text{cof.}\, z)^6}{3072} - \&c.]$$

Or, comme l'intégrale qu'on demande doit s'évanouir lorfque $z = 0$, & recevoir fa valeur complète lorfque $z = 360$ degrés, le calcul peut s'abréger confidérablement. Car on peut négliger dans l'équation différentielle tous les termes qui renfermeroient cof. z, cof. $2z$, cof. $3z$, cof. $4z$, &c; parce que ces termes, en paffant dans l'intégrale, contiendroient fin. z, fin. $2z$, fin. $3z$, fin. $4z$, &c, qui s'évanouiffent lorfque $z = 0$, & lorfque $z = 360$ degrés. Par conféquent, puifqu'on a en général, $(\text{cof.}\, z)^2 = \frac{1 + \text{cof.}\, 2z}{2}$; $(\text{cof.}\, z)^3 = \frac{\text{cof.}\, z + \text{cof.}\, z\, \text{cof.}\, 2z}{2} = \frac{3\, \text{cof.}\, z}{4} + \frac{\text{cof.}\, 3z}{4}$; $(\text{cof.}\, z)^4 = \frac{1}{4} + \frac{\text{cof.}\, 2z}{2} + \frac{(\text{cof.}\, 2z)^2}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof.}\, 2z}{2} + \frac{\text{cof.}\, 4z}{8}$, &c; on fuppofera cof. $z = 0$, $(\text{cof.}\, z)^2 = \frac{1}{2}$, $(\text{cof.}\, z)^3 = 0$, $(\text{cof.}\, z)^4 = \frac{3}{8}$, $(\text{cof.}\, z)^5 = 0$, $(\text{cof.}\, z)^6 = \frac{5}{16}$; &c. L'équation à intégrer fera donc, $dQ = \frac{t r^2 \sqrt{(anr)}}{\theta} \times dz \left(1 - \frac{1}{32 n^2} - \frac{5}{1024 n^4} - \&c\right)$: d'où l'on tire (en faifant après l'intégration, $z = 360$ degrés $= \frac{2\Pi}{1}$), $Q = \frac{2 \Pi t r^2 \sqrt{(anr)}}{\theta}$ $\left(1 - \frac{1}{32 n^2} - \frac{5}{1024 n^4} - \&c\right)$,

expreſſion de la quantité d'eau qui ſort pendant le temps t, par l'orifice entier $KMVN$. Cette ſérie eſt ſi convergente, que pour peu que OR ſurpaſſe OK, il ſera plus que ſuffiſant d'employer ſes trois premiers termes dans la pratique.

(223.) COROLLAIRE. Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-deſſus de l'orifice : on aura (201), $Q = \frac{2t\Pi r^2 \sqrt{ax}}{\theta}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q & dégageant x, on trouvera $x = nr\left(1 - \frac{1}{16n^2} - \frac{9}{1024n^4} - \&c.\right)$. Par où l'on voit que la hauteur moyenne x eſt moindre que RO. Lorſque n vaut au moins 1, ces deux lignes peuvent être regardées comme égales dans la pratique.

(224.) *REMARQUE I.* Lorſque la ſurface de l'eau affleure l'extrémité ſupérieure K du diamètre KV, on a $n = 1$, & la formule de l'article 222 peut donner encore Q. Mais alors, en cherchant directement Q, on trouvera que cette quantité peut s'exprimer par une équation finie & algébrique. En effet, on a, dans ce cas, $dQ = \frac{2tr^2\sqrt{ar} \,.\, dz\,(\text{ſin.}\,z)^2\sqrt{(1 - \text{coſ.}\,z)}}{\theta}$.

Faiſons $1 - \text{coſ.}\,z = y$; nous aurons $dz\,(\text{ſin.}\,z)^2 \sqrt{(1 - \text{coſ.}\,z)} = y\,dy\sqrt{(2 - y)}$, dont l'intégrale eſt $y\int dy\sqrt{(2-y)} - \int dy \int dy\sqrt{(2-y)} = -\frac{2y(2-y)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4(2-y)^{\frac{5}{2}}}{15} + C$

$$= - \frac{2(\text{fin.}z)^2 \sqrt{(1 + \text{cof.}z)}}{3} - \frac{4(1 + \text{cof.}z)^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$+ C$. En déterminant la conſtante C par la condition que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $z = 0$, & reçoive ſa valeur complète, lorſque $z = 180$ degrés, on trouvera $\frac{32 t r^2 \sqrt{(2ar)}}{15\theta}$ pour l'expreſſion de la quantité d'eau qui ſort par le demi-orifice *KMV*, & par conſéquent $\frac{64 t r^2 \sqrt{(2ar)}}{15\theta}$ pour l'expreſſion de celle qui ſort par l'orifice entier *KMVN*.

La hauteur moyenne de l'eau eſt exprimée par la fraction $\frac{1024 \times 2r}{225\,\Pi^2}$, qui eſt à peu-près égale à $\frac{25}{27} r$. D'où l'on voit que cette hauteur eſt toujours moindre que la diſtance du centre de l'orifice à la ſurface de l'eau.

(225.) *REMARQUE II.* Il reſteroit encore à donner une formule pour meſurer la dépenſe, lorſque la ſurface de l'eau eſt au-deſſous du point *K*, & que par conſéquent l'orifice eſt un ſegment de cercle. Mais je ne la donne pas, parce que dans les problèmes de cette eſpèce où la ſurface ſupérieure de l'eau n'eſt pas ſoutenue par la paroi à l'endroit de l'orifice, elle s'abaiſſe ſenſiblement vers le milieu; ce qui trouble le rapport naturel des vîteſſes, & empêche que la théorie ne puiſſe déterminer les écoulemens que d'une manière aſſez imparfaite.

226. SCHOLIE GÉNÉRAL. Ces exemples suffisent, ce me semble, pour faire connoître la manière de déterminer les écoulemens des fluides par une seule ouverture latérale, de vases entretenus constamment pleins. Quand un fluide sort par plusieurs ouvertures à la fois, & que ces ouvertures sont toujours supposées petites, l'écoulement se fait par chacune d'elles de la même manière que si elle étoit seule. Il n'y a donc à cet égard aucune nouvelle difficulté dans le problème. Seulement on doit observer qu'une petite ouverture placée dans le voisinage d'une plus grande, donne un peu moins à proportion que celle-ci. J'expliquerai cela en détail à l'aide de l'expérience.

(227.) PROBLÈME V. *Exposer en général la méthode de trouver l'expression du temps* t *que l'eau met à s'abaisser d'une certaine hauteur dans un vase, par une ouverture latérale dont tous les points ne peuvent pas être supposés à la même distance de la surface du fluide, le vase se vidant sans recevoir de nouvelle eau ?*

Ayant supposé d'abord que l'eau se soit abaissée d'une hauteur indéterminée, je cherche par la méthode de l'article 201, la quantité de liqueur qui sortiroit, par l'orifice entier, pendant le temps élémentaire dt, si la surface de l'eau demeuroit toujours dans cette même position. La quantité dont il s'agit est toujours de cette forme $F \times dt$, F étant une fonction donnée de l'orifice & de la hauteur actuelle de la surface de l'eau au-dessus

d'un point donné du même orifice. Ensuite je suppose que la surface de l'eau s'abaisse, pendant l'élément du temps, d'une hauteur infiniment petite, en sorte qu'il s'écoule une quantité d'eau, qui est égale au produit de la surface du fluide par la petite hauteur dont elle s'est abaissée, & qui a par conséquent pour valeur Xdx; X étant la surface du fluide, quantité donnée par la figure du vase, dx la hauteur élémentaire dont cette surface s'abaisse. On aura donc l'équation $Fdt = Xdx$, ou $dt = \frac{Xdx}{F}$. Il ne s'agira plus que de substituer pour F & X leurs valeurs données dans chaque cas particulier, & puis d'intégrer.

Montrons par un exemple l'usage de cette formule.

(228.) PROBLÈME VI. *Trouver le temps que la surface de l'eau met à s'abaisser d'une hauteur proposée, dans un vase prismatique vertical, par un orifice rectangulaire vertical pratiqué à l'une de ses parois ?*

En nommant A l'aire de la base du vase ; f le côté horizontal de l'orifice ; b son côté vertical ; x la hauteur variable du fluide au-dessus de la base inférieure & horizontale de l'orifice ; θ le temps de la chute par la hauteur a : on aura (216),

$$-Adx = \frac{4fdt.\sqrt{a}.[x^{\frac{3}{2}} - (x-b)^{\frac{3}{2}}]}{3\theta};$$

j'écris $-dx$, parce que t augmentant, x diminue.

De-là on tire $dt = \frac{-3bA\,dx}{4f\sqrt{a}.[x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}]}$; & la queſtion eſt d'intégrer $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}$. Or, pour cela, je multiplie haut & bas, par $x^{\frac{3}{2}} + (x - b)^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3} + \frac{(x-b)^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3}$. Alors la première partie devient rationnelle, en faiſant $x = y^2$; & la ſeconde devient auſſi rationnelle, en faiſant $x - b = z^2$: elles ſont donc intégrables l'une & l'autre par les méthodes d'intégration pour les fractions rationnelles. Nos Lecteurs acheveront le calcul.

On voit que dans cet exemple, quoique fort ſimple, l'expreſſion du temps eſt un peu compliquée. Quelquefois la valeur du temps eſt affectée de deux ſignes d'intégration, & aucune des intégrales ne peut ſe trouver algébriquement. Mais le problème eſt toujours ſoluble par la méthode des quadratures ou des ſéries.



CHAPITRE IV.

De l'écoulement d'un fluide par un orifice horizontal quelconque, en ſuppoſant que les tranches conſervent leur parallélifme, & que tous les points d'une même tranche s'abaiſſent avec la même vîteſſe.

(229.) Nous avons déjà indiqué (187) cette double hypothèſe : nous ajouterons ici que la première partie ſemble être une ſuite néceſſaire de l'expérience, qui apprend que la ſurface ſupérieure du fluide demeure toujours horizontale. Car, puiſque la première tranche conſerve ſon parallélifme, il ſemble que la continuité du fluide & la force d'adhérence réciproque de tous ſes points, demandent que de proche en proche toutes les autres tranches s'abaiſſent parallèlement à elles-mêmes. D'ailleurs les mêmes cauſes qui tendent à entretenir le parallélifme de la première tranche paroiſſent devoir agir ſur les tranches intérieures, & y produire les mêmes effets, du moins à peu-près. Quant à la ſeconde partie de la même hypothèſe, elle ne peut pas être rigoureuſement exacte, lorſque le vaſe n'eſt pas priſmatique & vertical. Car les particules contiguës aux parois doivent néceſſairement en ſuivre la direction. Or, ſi ces

mouvemens ne sont pas verticaux, ils doivent produire quelques altérations dans le mouvement vertical des particules voisines. Mais comme le nombre des particules d'une tranche qui touchent les parois, est infiniment petit par rapport au nombre des autres particules de la même tranche, on peut supposer légitimement, ou sans craindre d'erreur sensible, que les altérations dont nous venons de parler sont comme nulles, & que tous les points d'une même tranche ont la même vîtesse verticale.

Voilà à peu-près les raisons sur lesquelles on établit la double hypothèse proposée. Elles sont certainement très-admissibles pour la partie supérieure du vase. Il n'en est pas tout-à-fait de même pour celle qui avoisine l'orifice. Car dans cette dernière partie les points fluides se dirigent de tous côtés vers l'orifice suivant des mouvemens obliques; & on ne peut pas supposer que les mêmes particules individuelles forment une même tranche horizontale, dont tous les points s'abaissent verticalement. Ainsi il est impossible que l'écoulement déterminé, suivant l'hypothèse dont il est question, puisse être exactement conforme à l'expérience. Mais on sent d'un autre côté que les erreurs de la théorie doivent suivre, du moins à peu-près, la même loi dans tous les cas. Si l'on a donc soin de constater ces erreurs par quelques expériences, & de dresser en conséquence des petites Tables de correction, rien n'empêchera d'appliquer cette théorie à la pratique, en faisant dans chaque cas particulier la

correction dont il a besoin. Avec une telle restriction, j'adopte ici la même théorie, parce que tout bien pesé, il me paroît très-difficile d'imaginer d'autres moyens plus propres à représenter, au moins sensiblement, le mouvement des fluides, par des formules qu'on puisse appliquer à la pratique.

(230.) PROBLÈME I. *Trouver en général une équation entre la hauteur d'un fluide soumis à l'action de la pesanteur, dans un vase, & la vîtesse au sortir d'un orifice horizontal de grandeur quelconque ?*

Imaginons que le fluide proposé *ABCD*, *(Fig. 11.)* soit partagé en une infinité de tranches horizontales & égales *ADda*, *TVut*, &c. qui s'abaissent parallèlement à elles-mêmes, & dont chacune a la même vîtesse verticale dans toute sa largeur. Toutes ces tranches agissent les unes sur les autres dans toute l'étendue de la hauteur *Rq*, soit en se poussant, soit en s'entraînant ; en sorte que si la vîtesse des unes est retardée d'un instant à l'autre, la vîtesse des autres est accélérée. Il en est à cet égard du mouvement des particules fluides comme de celui de plusieurs corps solides, formant un même système, dont aucun ne peut se mouvoir sans agir sur les autres & sans éprouver leur réaction. Ces efforts réciproques se combinent tellement entr'eux, que si quelques corps perdent du mouvement, les autres en gagnent en conséquence, & que la somme de toutes ces variations, est nécessairement zéro. Fig. 11.

Soient	la gravité	$= g$,
	la hauteur donnée Rq	$= h$,
	l'aire de l'orifice pq	$= K$,
	l'aire exprimée par la ligne AD, & qui eſt une fonction de Rq, donnée par la figure du vaſe	$= M$,
	la hauteur indéterminée RH	$= x$,
	l'aire exprimée par TV, fonction donnée de x	$= y$,
	la vîteſſe de la tranche qui ſort de l'orifice	$= u$,
	la vîteſſe de la tranche $TVut$	$= v$,
	le temps	$= t$.

Suppoſons que dans l'inſtant dt la vîteſſe v devienne $v + dv$, (dv pouvant être poſitive ou négative). Il eſt clair que ſi les tranches n'agiſſoient point les unes ſur les autres, la vîteſſe v, à la fin de l'inſtant dt, deviendroit $v + g\,dt$. Ainſi, puiſqu'elle devient $v + dv$, & que $v + g\,dt = v + g\,dt + dv - dv$, on voit que le fluide reſteroit en équilibre ſi chaque tranche n'étoit animée que de la vîteſſe $g\,dt - dv$. Ces ſortes de vîteſſes qui ſe détruiſent mutuellement & qui varient d'une tranche à l'autre, ſont les unes poſitives, les autres négatives; & on a par conſéquent, ſur toute l'étendue de la hauteur Rq, $\int dx\,(g\,dt - dv) = 0$; ou, en mettant pour dt ſa valeur $\frac{dx}{v}$, $\int \frac{g\,dx^2}{v} - \int dx\,dv = 0$. Subſtituant pour v ſa valeur $\frac{Ku}{y}$; pour dv ſa valeur $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{y^2}$; nous aurons $\int \frac{g\,y\,dx^2}{Ku}$

$$-\int \frac{K dx (y du - u dy)}{yy} = 0.$$

Cela posé, comme l'intégrale doit être prise relativement à la hauteur Rq; & que par conséquent u & du doivent, pour le moment, être regardées comme constantes; que de plus ydx est une quantité constante: nous pouvons mettre notre équation sous cette forme, $\frac{g.ydx}{Ku}$ $\int dx - Kdu\int \frac{dx}{y} + Kuydx\int \frac{dy}{y^3} = 0$.

Or, $\int dx$ devient h; $\int \frac{dx}{y}$ (en suppléant convenablement les homogènes) peut représenter l'aire, que je nomme N, d'une courbe construite sur l'axe Rq, & dont les ordonnées sont réciproquement proportionnelles aux différentes sections du réservoir qui répondent aux différens points de Rq; $\int \frac{dy}{y^3}$ représente l'aire d'une courbe qui doit s'évanouir quand $y = AD = M$ & recevoir sa valeur complète quand $y = K$, & partant cette aire $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$. De plus $ydx = ADda = M \times Rr$. Donc l'équation deviendra $2gh.M^2 \times Rr - 2K^2.M.N.udu + uu \times Rr (K^2 - M^2) = 0$; ou (en nommant s la hauteur dûe à la vîtesse u, ce qui donne $uu = 2gs$),

(A). $h.M^2 \times Rr - K^2.M.Nds + s \times Rr \times (K^2 - M^2) = 0$:

Équation demandée, qui nous sera fort utile.

(231.) COROLLAIRE. On voit d'abord que si l'orifice K peut être supposé infiniment petit par rapport aux amplitudes du vase, cette équation devient (en négligeant les termes qui contiennent K), $hM^2 \times Rr - M^2 s \times Rr = 0$, ou $s = h$. D'où il suit qu'à chaque instant la vîtesse au sortir de l'orifice est dûe à la hauteur h du fluide au-dessus de l'orifice, comme nous l'avons trouvé (195).

(232.) PROBLÈME II. *Déterminer les quantités relatives à l'écoulement, pour un vase entretenu constamment plein ?*

Supposons que notre vase $ABCD$, soit entretenu constamment plein à la hauteur Rq; & imaginons qu'à mesure que la surface AD s'abaisse dans un instant en ad, & qu'il sort par conséquent une petite quantité de liqueur, égale à $AD \times Rr$, imaginons, dis-je, que la tranche $ADda$ est remplacée par une autre qui est, pour ainsi dire, créée en sa place, & qui a la même vîtesse qu'elle. Que le produit $K \times z$, de l'orifice K par la ligne z représente la quantité de liqueur qui sort pendant le temps t. Il est clair qu'on aura $Kdz = M \times Rr$. Par conséquent l'équation (A) deviendra ici,

$$hM^2 dz - K.M^2 N ds + (K^2 - M^2) s dz = 0;$$

où il n'y a que z & s de variables.

Il est facile d'intégrer cette équation; car si l'on fait, pour abréger le calcul, $\frac{h}{K.N} = b$,

$\frac{M^2 - K^2}{K.M^2 N} = f$, on aura $ds + fsdz = bdz$; ou, $dz = \frac{ds}{b - fs}$, dont l'intégrale est $z = -\frac{1}{f} L.(b - fs) + C$, c'est-à-dire (en déterminant la constante C de manière que $s = 0$ donne $z = 0$), $z = \frac{1}{f} L.(\frac{b}{b - fs})$. Cette équation donne (en nommant c le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, & repassant aux nombres), $s = \frac{b}{f}(1 - c^{-fz})$. On a donc en termes finis la relation entre la hauteur s dûe à la vîtesse au sortir de l'orifice & l'espace z parcouru par le fluide à sa sortie. Par conséquent on connoîtra la quantité Kz de liqueur écoulée pour la hauteur s.

Si on veut avoir de même la relation entre le temps t & la hauteur s, on observera que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b - fs)\sqrt{2gs}}$. Faisons $s = y^2$, $\frac{b}{f} = m^2$: nous aurons $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \times \frac{dy}{m^2 - y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}(\frac{dy}{m + y} + \frac{dy}{m - y})$, dont l'intégrale est $t = A + \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \times L.(\frac{m + y}{m - y}) = A + \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \times L.(\frac{\sqrt{b} + \sqrt{fs}}{\sqrt{b} - \sqrt{fs}})$. Donc la constante A est zéro, parce que t & s sont zéro en même temps. Ainsi

$t = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}\sqrt{2g}} \times L.(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-\sqrt{fs}})$. On pourra comparer ce temps à celui θ qu'un corps grave met à tomber de la hauteur a; car on a $\theta = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$.

La relation entre t & z se trouvera en mettant dans l'équation $dt = \frac{dz}{u}$ pour u sa valeur $\sqrt{2gs}$, ensuite pour s sa valeur en z, trouvée ci-dessus: par-là on aura, $dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}}.\sqrt{[1-c^{-fz}]}}$.

Soit $c^{-fz} = y$, & par conséquent $dz = -\frac{dy}{fy}$; on aura la tranformée, $dt = -\frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{[1-y]}}$, ou (en faisant $1-y = xx$), $dt = \frac{2}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times (\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x})$, dont l'intégrale est $t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times [\log.(1+x) - \log.(1-x)]$, ou bien (en chassant x), $t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times [L.(1+\sqrt{[1-c^{-fz}]}) - L.(1-\sqrt{[1-c^{-fz}]})]$.

Il ne faut point ajouter de constante, parce que $z = 0$ donne $t = 0$, comme cela doit être. Par le moyen de cette équation, on connoîtra la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné; car

car cette quantité $= K \times z$, qu'on peut exprimer maintenant en fonction du temps & de constantes.

(233.) *REMARQUE.* La manière dont nous avons imaginé *(art. précéd.)*, que le vase $ABCD$ est entretenu constamment plein, a rarement lieu dans la pratique. Ordinairement la nouvelle tranche $ADda$, ajoutée à chaque instant pour réparer la dépense qui se fait par l'orifice pendant le même instant, est fournie par une affusion latérale, & elle reçoit sa vîtesse de celle qui la précède en descendant & qui l'entraîne en vertu de la ténacité réciproque des parties du fluide. Alors il faut faire quelque changement à la méthode de l'article précédent, pour l'appliquer au cas dont il s'agit.

Soient V la vîtesse de la tranche $ADda$; v la vîtesse de la tranche indéterminée $TVut$; g la gravité; t le temps; $rH = x$. Si la tranche $ADda$ étoit livrée à l'action libre de la pesanteur, elle acquerroit dans l'instant dt la vîtesse gdt. On pourra regarder cette vîtesse gdt comme composée de la vîtesse V & d'une autre $gdt - V$ qui doit être anéantie. Par conséquent, si cette même vîtesse $gdt - V$ existoit seule dans la tranche $ADda$, & si les autres tranches qui répondent à la hauteur rq étoient animées chacune de la vîtesse $gdt - dv$; tout le système demeureroit en équilibre. On aura donc l'équation $Rr \times (gdt - V) + \int dx\,(gdt - dv) = 0$, qui devient (en négligeant gdt par rapport à V, &

faisant comme ci-dessus, $AB = M, pq = K, Rq$ ou $rq = h$),

$$-2Rr \times K.M.V.u + 2gh \times M^2 \times Rr - 2K^2 \times M.N.udu + Rr \times u^2 \times (K^2 - M^2) = 0;$$

ou bien encore (en nommant $K \times z$ la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t, s la hauteur dûe à la vitesse u, & considérant que $V = \frac{Ku}{M}$, $Rr = \frac{Kdz}{M}$, $uu = 2gs$),

$$h\, M^2 dz - (K^2 + M^2)\, s\, dz - K.M^2 \times Nds = 0:$$

équation qui est de la même forme que celle de l'article précédent, & qui est par conséquent susceptible des mêmes calculs.

Lorsque l'orifice K peut être regardé comme infiniment petit, on a ici, comme dans la première hypothèse, $s = h$.

(234.) PROBLÈME III. *Trouver les quantités relatives à l'écoulement, pour un vase qui se vide sans recevoir de nouvelle eau !*

Supposons qu'au premier instant la surface du fluide soit en SX, & qu'au bout du temps t elle prenne la position indéterminée AD, la hauteur Rq étant ici variable. Il est clair que si en conservant d'ailleurs les autres dénominations de l'article 230, on fait $Rq = z$, & par conséquent $Rr = -dz$, l'équation (A) s'appliquera ici, & deviendra,

$$M^2 z dz + K^2 M.Nds + sdz(K^2 - M^2) = 0.$$

Cette équation eſt réductible à la forme $ds + sPdz = Qdz$, P & Q étant des fonctions de z & de conſtantes. Pour l'intégrer, je multiplie tous ſes termes par une fonction φ de z, telle que le premier membre devienne intégrable : le ſecond le ſera toujours, au moins par les quadratures, quelle que puiſſe être cette fonction. Nous aurons donc d'abord $\varphi ds + \varphi s Pdz = \varphi Q dz$. Enſuite ſuppoſons qu'on ait $\varphi s = \int \varphi Q dz$, & par conſéquent $\varphi ds + s d\varphi = \varphi Q dz$. En comparant enſemble les deux équations différentielles, terme à terme, nous aurons $s d\varphi = \varphi s Pdz$, ou bien $\frac{d\varphi}{\varphi} = Pdz$; & $L.\varphi = \int Pdz$. Donc en nommant c le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1, & repaſſant aux nombres, $\varphi = c^{\int Pdz}$. Subſtituant cette valeur de φ dans l'équation $\varphi s = \int \varphi Q dz$, nous aurons $s = c^{-\int Pdz} . \int Q c^{\int Pdz} . dz$. On a donc la relation entre s & z.

Les relations entre toutes les quantités qui appartiennent au problême, ſe trouvent ſans peine comme dans les cas précédens ; & la queſtion ſe réduit toujours en général aux quadratures des courbes. Bornons-nous à l'examen d'un cas particulier.

(235.) PROBLÈME IV. *Déterminer l'écoulement,*

lorsque le vase qui se vide sans recevoir de nouvelle eau, est un cylindre vertical?

Suivant nos dénominations, M représente la section constante & horizontale du cylindre; $N = \frac{z}{M}$. Ainsi l'équation générale de l'article précédent, devient

$$M^2 z dz + K^2 z ds - (M^2 - K^2) s dz = 0.$$

Soient, pour abréger le calcul, $\frac{M^2}{K^2} = m$, $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$: nous aurons $z ds - n s dz + m z dz = 0$. Je multiplie tout par φ fonction de z; & supposant que l'on ait $\varphi z s + \int \varphi m z dz = A$, cette dernière équation donnera $\varphi z ds + s(\varphi dz + z d\varphi) + \varphi m z dz = 0$. Comparant terme à terme cette équation avec l'équation $\varphi z ds - \varphi n s dz + \varphi m z dz = 0$, on aura $\varphi dz + z d\varphi = - \varphi n dz$, ou $\frac{d\varphi}{\varphi} = -(n+1) \frac{dz}{z}$; donc $\times \varphi = B z^{-(n+1)}$. L'équation $\varphi z s + \int \varphi m z dz = A$, deviendra donc, $(1-n) \times s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, en nommant H la hauteur primitive & donnée du fluide, & déterminant la constante $\frac{A}{B}$ par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, ou qu'au premier instant la vitesse du fluide soit nulle.

Si, au premier instant le fluide avoit dans le

cylindre, par quelque cause extérieure, une vîtesse dûe à une hauteur donnée b, il faudroit déterminer la constante A par la condition que $z = H$, donnât $s = b \times \frac{M^2}{K^2}$. On aura donc toujours facilement s en fonctions de z & de constantes.

On trouvera aussi sans peine la relation entre le temps & la vîtesse, & la relation entre le temps & la hauteur z.

(236.) *REMARQUE I.* Lorsqu'on a $n = 1$, ou $M^2 = 2K^2$, la formule de l'article précédent donne pour s une valeur indéterminée. Alors il faut remonter à l'équation différentielle $M^2 z dz + K^2 z ds - (M^2 - K^2) s dz = 0$, qui devient, $2 z dz + z ds - s dz = 0$; ou bien $\frac{z ds - s dz}{z^2} = - \frac{2 dz}{z}$ dont l'intégrale est $\frac{s}{z} = L . A - L . z^2$. Donc en déterminant la constante A par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, on aura $s = z . L . (\frac{H^2}{z^2})$.

(237.) *REMARQUE II.* Nous ferons sur ce même problème une autre remarque qui s'applique, avec les changemens convenables, à toutes sortes de vases. Supposons que la surface de l'eau immobile au premier instant dans le cylindre, s'abaisse de la très-petite hauteur q. On aura $z = H - q$, & (en négligeant le quarré & les plus hautes puissances de q), $z^{-n} = (H - q)^{-n} = H^{-n}$

$+ n H^{-n-1} q, z^{1-n} = (H-q)^{1-n}$ $= H^{1-n} - (1-n) H^{-n} q$. Substituant ces valeurs dans l'équation générale $(1-n) s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, elle deviendra $Hs + nsq - mHq = 0$, ou bien $s = \frac{mHq}{H + nq}$, ou encore, en négligeant le second terme du dénominateur, $s = mq = q \times \frac{M^2}{K^2}$. D'où il suit que la hauteur dûe à la vîtesse de la surface de l'eau dans le cylindre, est exprimée par q. Cette surface descend donc dans les premiers instans du mouvement à la manière des corps qui tombent librement par la pesanteur, ou comme s'il n'y avoit pas de fond dans le cylindre & que le fluide tombât tout d'une pièce.

De-là on a tiré une objection contre l'hypothèse du parallélisme des tranches. Il est impossible, dit-on, que le fluide sortant par l'ouverture pq moindre que le fond BC puisse jamais descendre de la même manière que si ce fond ne lui faisoit aucun obstacle. A cela, on peut répondre que l'objection seroit sans replique, si sur la hauteur entière Oq du cylindre les vîtesses des différentes tranches étoient égales entr'elles. Mais en supposant qu'à une petite distance du fond les particules se dirigent vers l'orifice suivant des mouvemens obliques Mp, Nq, & regardant les portions de fluide MpB, NqC

comme ſtagnantes, les particules qui répondent à l'eſpace $p\,M\,N\,q$ ſe mouvront plus vîte que celles de la partie ſupérieure $S\,M\,N\,X$ du cylindre; & conſéquemment il pourra ſe faire que la ſurface de l'eau deſcende, pendant les premiers inſtans, à peu-près comme un corps peſant & libre. L'expérience doit ſeule décider entre ces deux opinions. Or, elle apprend qu'il n'y a pas de portion de fluide qui ſoit rigoureuſement ſtagnante, & que toutes les particules ont une tendance marquée vers l'orifice; mais que celles qui ſont dans le voiſinage du trou ont des mouvemens plus rapides que les autres. Il paroît donc que dans cette partie inférieure du vaſe l'hypothèſe du paralléliſme des tranches n'a pas lieu; mais elle eſt ſenſiblement vraie dans toute la partie ſupérieure. D'ailleurs, quand même elle détermineroit l'écoulement d'une manière erronée pour un temps qui eſt comme infiniment petit, il ne s'enſuit point qu'elle ne ſoit pas propre à repréſenter d'une manière très-approchée les écoulemens qui répondent à des temps finis, ou que du moins on n'en puiſſe tirer, à peu de choſe près, les rapports de différens écoulemens. Car ſi les erreurs auxquelles elle eſt ſujette ſuivent toujours la même marche, il pourra ſe faire que les écoulemens naturels & phyſiques ſoient entr'eux comme les écoulemens déterminés par la méthode dont il s'agit.

(238.) PROBLÈME V. *Trouver le mouvement d'une quantité déterminée de fluide peſant ou non, qui*

se meut dans un vase, soit en vertu de la seule pesanteur, soit en vertu d'une impulsion primitive donnée au fluide, soit par l'action de ces deux forces à la fois!

L'équation générale de l'article 230, va nous donner la solution de ce problème. Conservant donc la même Figure & les mêmes dénominations, concevons d'abord que le fond BC soit anéanti, ou qu'on ait $K = BC$, pour permettre au fluide de couler le long du vase, suivant la loi de continuité. Supposons ensuite que la portion donnée de fluide occupe, au premier instant, l'espace $SZKX$, & qu'à la fin du temps t elle soit parvenue dans la position indéterminée $ABCD$. Il est clair qu'en nommant z l'espace OR parcouru verticalement par la surface du fluide, les quantités M, K, N, h, seront des fonctions données de z & de constantes, puisque la figure du vase est donnée, & que les deux espaces $SZKX$, $ABCD$ sont égaux entr'eux. L'équation qui représente le mouvement du fluide sera donc toujours de cette forme, $Z\,dz + AZ'ds + BsZ''dz = 0$; Z, Z' Z'' étant des fonctions de z; A, B, des quantités constantes: & on intégrera cette équation par la méthode de l'article 234. Il faudra que l'intégrale soit telle que la vîtesse initiale d'une tranche donnée du fluide soit donnée.

Quand le fluide n'a pas de pesanteur, le premier terme de l'équation, qui est relatif à cette force, s'évanouit; & l'équation devient fort simple.

Connoiſſant la relation entre s & z, on trouvera facilement t en s ou en z.

On voit que ce problème peut ſervir à déterminer le mouvement de l'eau qui coule dans de longs tuyaux, abſtraction faite de tout frottement.

(239.) PROBLÈME VI. *Déterminer la preſſion qu'un fluide coulant dans un vaſe ou dans un tuyau, exerce contre ſes parois!*

Nous tirons encore de l'article 230 la ſolution de ce problème. Reprenons donc l'hypothèſe, la conſtruction & les dénominations de cet article. La vîteſſe avec laquelle chaque tranche devroit tendre à ſe mouvoir pour demeurer en équilibre, étant $g\,dt - dv$, & par conſéquent la force correſpondante de la même tranche étant $g - \frac{dv}{dt}$, on voit qu'en vertu de ces forces $g - \frac{dv}{dt}$, les tranches ſe preſſent les unes les autres, de la même manière que dans un fluide peſant & en repos dans un vaſe les tranches ſe preſſent les unes les autres en vertu de la peſanteur. Donc à la profondeur $RH\,(x)$, la preſſion de chaque point de la tranche $TVut$ eſt exprimée par $\int dx\,(g - \frac{dv}{dt})$. Cette force qui ſe tranſmet en tout ſens, agit perpendiculairement contre les parois Tt, Vu. Or, $\int dx\,(g - \frac{dv}{dt}) = g \times RH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$. Mettant pour dv ſa valeur $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, on

aura $\int \frac{dxdv}{dt} = \frac{Kdu}{dt} \int \frac{dx}{y} - \frac{Kuydx}{dt} \int \frac{dy}{y^3}$. Les intégrations indiquées, doivent être effectuées de manière que l'aire représentée par $\int \frac{dx}{y}$ & que je nomme Q, réponde à RH; & que $\int \frac{dy}{y^3}$ s'évanouisse lorsque $y = AD$, & reçoive sa valeur complète lorsque $y = TV = H$. Ainsi en mettant pour ydx sa valeur $M \times Rr$, on trouvera que la pression $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$, qui répond à la hauteur $RH = g \times RH - \frac{K.Qdu}{dt} + \frac{Ku \times Rr \times (H^2 - M^2)}{2dt.H^2 M^2}$, expression dans laquelle on substituera dans chaque cas, pour u & dt leurs valeurs.

Si la valeur de la pression, pour quelqu'endroit du vase, étoit négative, cela signifieroit qu'en cet endroit les tranches n'agiroient pas les unes sur les autres, & que par conséquent le fluide n'y formeroit pas une masse continue, ou se détacheroit par parties.

(240.) PROBLÈME VII. *Trouver, par les mêmes principes, la force qu'il faut employer pour soutenir un vase qui donne de l'eau par l'ouverture* p q *?*

La force cherchée est égale à la somme des produits de chaque tranche multipliée par la force en vertu de laquelle la même tranche demeureroit

en équilibre, par la même raiſon que la force requiſe pour ſoutenir l'effort d'un fluide peſant & en repos dans un vaſe eſt égale à la ſomme des produits de chaque tranche multipliée par la peſanteur. Ainſi elle a pour valeur, $\int y\,dx\,(g - \frac{dv}{dt})$ $= \int g y\,dx - \int \frac{y\,dx\,dv}{dt}$. La première partie eſt le poids même du fluide; la ſeconde ſe trouve ſans peine par ce qui précède.

(241.) SCHOLIE GÉNÉRAL. On voit par la théorie générale que nous venons d'expoſer, que dans l'hypothèſe du parallélisme des tranches, on détermine d'une manière aſſez ſimple tout ce qui eſt relatif à l'écoulement des fluides qui ſortent, par des ouvertures horizontales, des vaſes où ils ſont contenus. La même théorie s'applique également à la recherche du mouvement des fluides dans de longs tuyaux inclinés, quelques ſinuoſités qu'ils puiſſent avoir dans le ſens de leur longueur, pourvu néanmoins que leur courbure ne varie pas trop bruſquement d'un point à l'autre. Il eſt indifférent, quant à la facilité du calcul, de ſuppoſer alors, ou que les tranches ſont horizontales, ou qu'elles ſont perpendiculaires aux parois du tuyau en chaque endroit. En comparant avec l'expérience les réſultats des calculs dans les deux ſuppoſitions, on verra laquelle mérite la préférence. Je n'ai pas beſoin d'ajouter que dans la ſeconde, les tranches ne ſont parallèles entr'elles que de proche en

proche & ſur chacun des élémens de la longueur du tuyau.

A l'égard des vaſes qui donnent de l'eau par de grandes ouvertures latérales, leurs écoulemens ne peuvent pas être déterminés par la méthode du parallélifme des tranches. Car lorſque les particules contenues dans le vaſe ſont arrivées aux environs de l'orifice, elles ſe détournent de la verticale, & prennent des directions plus ou moins courbes, tendantes au même orifice. De plus, à leur ſortie, elles n'ont pas la même viteſſe ; les plus éloignées de la ſurface du fluide ſe meuvent néceſſairement plus vîte que les autres. Il n'y a donc pas alors d'autre méthode ſimple & commode pour déterminer l'écoulement, que celle du chapitre précédent; mais il faut pour cela que l'orifice ſoit petit en comparaiſon des amplitudes du vaſe, comme nous l'avons déjà obſervé.



CHAPITRE V.

Méthodes plus exactes que les précédentes, pour déterminer le mouvement d'un fluide qui coule dans un vase.

(242.) L'HYPOTHÈSE du mouvement parallèle des particules fluides étant sujette à plusieurs difficultés que nous avons rapportées, avec les explications que l'on donne pour les résoudre, ou du moins pour les atténuer, les Géomètres ont cherché d'autres moyens analytiques plus exacts pour représenter le mouvement des fluides. M. d'Alembert a fait voir depuis long-temps qu'on pouvoit appliquer immédiatement à cette recherche le principe d'égalité de pression (*Résistance des fluides, 1752; Opuscules Math. tome I.er & V*). M. Euler a traité depuis la même matière avec une profondeur & une abondance qui, dans l'état où l'analyse se trouve aujourd'hui, ne permettent guères d'aller plus loin, sans envisager le problème sous un point de vue un peu différent. (*Acad. de Berlin, 1755; Acad. de Péterſbourg, 1768, 1769, 1770, 1771*) Malheureusement toutes ces formules n'offrent, pour ainsi dire, que des vérités spéculatives; & quand on veut en faire des applications physiques, il faut tellement les simplifier ou les dénaturer par différentes suppositions, qu'il auroit peut être autant

valu établir d'abord le calcul sur des principes moins rigoureux. C'est ce qui a déterminé M. d'Alembert à proposer *(Op. Math. tome VI, 1773 : & VIII, 1782)*, une nouvelle méthode plus simple, susceptible d'une grande exactitude, & dont les élémens peuvent être vérifiés facilement par l'expérience. Il se contente de supposer que la surface d'un fluide qui coule dans un vase demeure toujours horizontale, ce qui est conforme à l'expérience; ensuite il imagine, comme il l'avoit déjà fait dans le Tome I.er de ses *Opuscules Math.* publié en 1761, que le fluide soit partagé en une infinité de tuyaux infiniment étroits qui, partant de la surface supérieure, viennent se terminer à la surface inférieure ou à l'orifice, par une direction plus ou moins oblique, selon qu'ils sont plus ou moins éloignés du centre de l'orifice, de manière que la direction du filet central est évidemment une simple ligne droite verticale.

Dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1781, M. de la Grange qui avoit déjà appliqué *(Acad. de Turin, 1762)*, avec le plus grand succès, au mouvement des fluides, un principe de Dynamique, fondé sur la méthode *de maximis & minimis*, a fait de nouveaux efforts dignes de son génie, pour perfectionner la théorie générale du mouvement des fluides, & sur-tout les moyens de l'appliquer à des questions particulières.

On trouvera dans les deux problèmes suivans la substance, ou une idée générale des travaux de

ces grands Géomètres, ſur une matière ſi importante. Je commence par celui qui a le plus de rapport avec ce qui précède.

(243.) PROBLÈME I. *Déterminer l'écoulement d'un fluide par l'orifice d'un vaſe, dans l'hypothèſe que la ſurface du fluide demeure toujours horizontale, & que les particules ſe meuvent dans des tuyaux fictifs depuis la ſurface juſques à l'orifice !*

La ſurface AD du fluide *(Fig. 12)*, demeurant toujours horizontale, il eſt évident que ſi l'on parvient à connoître la vîteſſe avec laquelle l'un quelconque de ſes points s'abaiſſe à chaque inſtant, on connoîtra auſſi la quantité élémentaire d'eau qui ſort pendant cet inſtant par l'orifice, puiſqu'elle eſt égale au produit de la ſurface par le petit eſpace que parcourt l'un des points de cette même ſurface. Nous allons donc chercher le mouvement élémentaire du point R qui répond verticalement au centre H de l'orifice $p\,q$. De-là on trouvera, par l'intégration, la quantité d'eau qui ſort par l'orifice, pendant un temps fini. Fig. 12.

Conſidérons la ligne verticale $R\,H$ comme l'axe d'un tuyau infiniment étroit $RSMNH$, dans lequel toutes les particules voiſines du filet central RH, ſe meuvent de la même manière que ſi ce tuyau formoit un vaſe iſolé. Nous regarderons, pour la plus grande généralité, la figure du tuyau comme variable d'un inſtant à l'autre; de ſorte que cette figure étant $RSMNH$ au commencement

d'un inſtant, elle devient $r s m n H$ à la fin de cet inſtant. Imaginons que tout le fluide contenu dans ce canal ſoit partagé en une infinité de tranches horizontales, d'un même volume. Puiſque tous les points du filet central $R H$ s'abaiſſent verticalement, il eſt clair que toutes les tranches dont il s'agit, peuvent être ſuppoſées s'abaiſſer auſſi verticalement, avec des vîteſſes qui ſont réciproquement proportionnelles à leurs largeurs. La méthode de l'article 230 pourra donc être employée ici pour déterminer la vîteſſe de l'une quelconque des tranches, & par conſéquent auſſi la vîteſſe de la ſurface $R S$, ou du point R.

Soient:

La gravité	$= g$,
La hauteur entière $R H$ du fluide	$= h$,
La hauteur variable $R P$	$= x$,
La tranche première $R S$ du tuyau primitif	$= R$,
La tranche dernière $H N$	$= H$,
La tranche dernière $H n$ du tuyau varié $r s m n H$	$= m$,
La vîteſſe de cette tranche $H n$	$= u$,
La tranche indéterminée $P m$	$= y$,
La viteſſe de cette tranche	$= v$,
L'élément du temps	$= dt$,
L'eſpace élémentaire dont le point R s'abaiſſe	$= dz$.

En appliquant ici le raiſonnement de l'article 230 déjà cité, on aura, pour la hauteur entière $R H$, l'équation, $\int d x\,(g\,d t - d v) = 0$; ou bien, $g\,d t \int d x - \int d x\, d v = 0$. Or, $\int d x = h$; $v = \frac{u m}{y}$, & $d v = d(\frac{u m}{y})$; donc, en ſuppoſant qu'à

qu'à cause de la variabilité du tuyau, m devienne $m + \delta m$; que x étant constante, y devienne $y + dy$; & que x devenant $x + dx$, y devienne $y + dy + \delta y$: on aura $d\left(\frac{um}{y}\right)$ $= \left[\frac{(u + du)(m + \delta m)}{y + dy + \delta y}\right] - \left(\frac{um}{y}\right)$ $= \frac{mdu + u\delta m}{y} - \frac{mu(dy + \delta y)}{y^2}$.

Substituons cette valeur de dv dans l'équation $g\,dt\int dx - \int dx\,dv = 0$, ou $hg\,dt - \int dx\,dv = 0$; mettons aussi pour dt sa valeur qu'on voit être $\frac{Rdz}{mu}$, puisque la tranche supérieure R s'abaisse avec une vîtesse $= \frac{mu}{R}$; enfin, considérons que toutes les intégrales indiquées doivent être prises de manière que les seules quantités dépendantes de x & de y sont variables, & que les autres doivent être regardées, dans ce calcul, comme constantes. Par-là nous obtiendrons (en observant encore que l'expression $y\,dx$ d'une tranche quelconque est supposée constante), $\frac{ghRdz}{mu} - (mdu + u\delta m)$ $\int\frac{dx}{y} + muydx\int\frac{dy}{y^3} + mu\int\frac{dx.\delta y}{y^2} = 0$.

Nommons N l'intégrale $\int\frac{dx}{y}$ pour la hauteur entière h; effectuons l'intégration $\int\frac{dy}{y^3}$, de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $y = R$, & reçoive sa valeur complète lorsque $y = H$; substituons pour $y\,dx$ sa valeur $R\,dz$; & $2gs$

pour u^2, s étant la hauteur dûe à la vîtesse u: nous aurons, $h R dz - m^2 N ds - 2 m N s \delta m + m^2 s R dz \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{H^2}\right) + 2 m^2 s \int \frac{dx \cdot \delta y}{y^3} = 0.$

Pour faire disparoître le terme qui contient δm, ce qui simplifiera le calcul, soit Δy une variation de y, telle que l'on ait $m \cdot \Delta y = m \delta y - y \delta m$, ou $\delta y = \frac{y \delta m}{m} + \Delta y$: l'équation précédente se changera en celle-ci.

(A). $h R dz - m^2 N ds + m^2 s R dz \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{H^2}\right) + 2 m^2 s \int \frac{dx \cdot \Delta y}{y^3} = 0.$

Dans cette équation, $\int \frac{dx \cdot \Delta y}{y^3}$ représente l'aire d'une courbe dont l'abscisse est x, l'ordonnée $\frac{\Delta y}{y^3}$, laquelle répond à l'axe entier RH & ne forme qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. La nature de la courbe SMN qui termine le tuyau fictif initial, & la variation Δy de l'ordonnée y, doivent être vérifiées par un nombre suffisant d'expériences. Alors on pourra faire de l'équation (A) des usages analogues à ceux qu'on a faits de l'équation pareille de l'article 230.

(244.) COROLLAIRE I. Supposons, pour éclaircir ce que nous venons de dire, par une application, que le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau, & que la base inférieure H du tuyau

fictif initial ſoit très-petite par rapport à la baſe ſupérieure R; ſuppoſons de plus que la tranche m, qui eſt regardée comme conſtante dans l'équation (A) ſoit égale à H. Alors, en nommant q la hauteur variable RH, ce qui donne $dz = -dq$: & négligeant tous les termes qui contiennent H^2, excepté toutefois le dernier qu'on verra tout-à-l'heure pouvoir être conſervé : l'équation (A) deviendra ſimplement, $-q + s + \frac{2H^2 s}{Rdq} \cdot \int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2} = 0$.

Cela poſé, ſi on avoit $s = q$, c'eſt-à-dire ſi la vîteſſe au ſortir de l'orifice H, étoit dûe à la hauteur entière du fluide dans le vaſe, le dernier terme de notre équation ſeroit zéro. Mais s'il y a quelque différence entre s & q, (l'expérience ſemble en effet prouver que s eſt un peu moindre que q), le terme dont il s'agit, qui n'eſt plus zéro, ſert à expliquer cette différence. Or, on peut attribuer à ce terme différentes valeurs, telles que l'intégrale $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2 dq}$ ſoit comparable à l'intégrale $\int \frac{dy}{y^3}$ qui, dans le cas préſent, eſt $-\frac{1}{2H^2}$. Car ſoit, par exemple, $y = a + p$, & $dy = dp$; $\Delta y = \frac{p^r dq}{(a+p)^r}$; $dx = \frac{A dp}{p^r (a+p)^k}$: il eſt clair que les deux différentielles $\frac{dy}{y^3}$ & $\frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2 dq}$, c'eſt-à-dire, $\frac{dp}{(a+p)^3}$ & $\frac{A p^{n-r} dp}{(a+p)^{k+r+2}}$, ſeront comparables

entr'elles, en prenant convenablement les exposans n, k, r. Il pourra même se faire que la seconde soit beaucoup plus grande que la première. On trouvera des résultats analogues pour une infinité d'autres suppositions sur les valeurs de y, Δy, dx.

(245.) COROLLAIRE II. Dans l'hypothèse du parallélisme des tranches sur toute la largeur du vase, la valeur de la pression en chaque point des parois est (239), $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$: ici la pression pour chaque point du tuyau fictif $RSMNH$ a semblablement pour valeur $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$; mais comme le dv n'est pas le même dans les deux cas, les pressions ne sont pas non plus les mêmes. La quantité $\int \frac{dx . \Delta y}{y^2}$, qui affecte maintenant la vîtesse, affecte aussi la pression; & cette altération se communique de proche en proche jusques aux parois du vase. De-là, en examinant par la voie de l'expérience, la vîtesse avec laquelle le fluide sortiroit par une petite ouverture faite aux parois, on pourroit tirer de nouvelles lumières sur la valeur de la quantité $\int \frac{dx . \Delta y}{y^2}$.

(246.) *REMARQUE.* Lorsque le vase $ABCD$ a une largeur finie, l'ordonnée y du tuyau fictif $RSMNH$ peut être très-différente de l'ordonnée correspondante du vase; & le terme qui dans l'équation (A) contient $\int \frac{dx . \Delta y}{y^2}$, peut être très-

comparable aux autres. Mais si le vase est infiniment étroit, la vîtesse de tous les points d'une même tranche est à peu-près la même; l'ordonnée du tuyau fictif est à très-peu de chose près l'ordonnée même du vase; le δy & le Δy sont infiniment petits par rapport à dy. D'où il résulte que dans le cas présent, la quantité $\frac{dx.\Delta y}{y^2}$ sera infiniment plus petite par rapport à $\frac{dy}{y^3}$, que lorsque la largeur du vase est supposée finie.

Toute cette théorie porte, comme on voit, sur des élémens qui doivent être donnés par des expériences variées & répétées de plusieurs manières: expériences nullement difficiles à imaginer & à exécuter.

(247.) PROBLÈME II. *Déterminer par le principe d'égalité de pression, le mouvement d'un fluide qui coule dans un vase?*

La solution générale de ce problème dépend de plusieurs considérations que nous allons exposer successivement.

I. Quelles que soient les forces dont une masse fluide en équilibre puisse être animée, nous avons vu (179, n.° 4), que si l'on conçoit dans cette masse un canal de figure quelconque, rentrant en lui-même, la liqueur contenue dans ce canal sera en équilibre indépendamment du reste de la masse: c'est-à-dire, que si l'on imagine que le reste du

fluide se durcisse sans pouvoir changer de place, ni de volume, il y aura équilibre dans le canal, comme auparavant. Rien n'est, en effet, plus évident. Car le fluide contenu dans le canal demeure toujours dans le même état de compression, & chacune de ses particules est toujours également pressée en tout sens; il n'y a par conséquent aucune raison pour que l'équilibre se rompe.

II. En conséquence de cette loi, considérons
Fig. 13. dans un fluide en équilibre (*Fig. 13*) quatre points, M, N, K, H, pris où l'on voudra, mais situés dans un même plan, & formant entr'eux un canal rectangulaire $MNKH$. Ce canal sera en équilibre. Ayant choisi à volonté le point fixe E, & ayant mené, pour le point M, les coordonnées rectangles $EP = x$, $PM = y$, l'une parallèle à MH, l'autre à MN, supposons que toutes les forces auxquelles les particules du fluide sont soumises, agissent dans le plan EPM, & que par conséquent chacune d'elles soit réductible à deux autres, l'une parallèle à EP, l'autre à PM. Nommons P & P' les forces qui poussent les points M & N parallèlement à EP; Q & Q' les forces qui poussent les points M & H parallèlement à PM; & que ces différentes forces soient des fonctions de x, de y, & d'un temps t écoulé depuis une certaine époque. De plus, faisons $MH = \delta x$, $MN = \delta y$. Ces différentielles δx, δy sont relatives au changement qui arrive lorsqu'on passe de la considération du point M à celle d'un autre point H ou N qui en

eſt infiniment proche, tandis que je conſerve les différentielles dx & dy pour indiquer le changement qui arrive lorſqu'une *même* particule paſſe du lieu qu'elle occupe au lieu contigu. Elles ſe trouvent les unes & les autres par les mêmes règles; & on doit obſerver que dans les différentielles d'une fonction relative aux mêmes coordonnées x & y, δx & dx ont toujours le même coéfficient, & que δy & dy ont auſſi le même coéfficient.

Maintenant, il eſt clair qu'en vertu de la force Q, la preſſion de la colonne MN ſur le point N eſt $Q\,\delta y$; & qu'en vertu de la force P', la preſſion de la colonne NK ſur le point K eſt $P'\,\delta x$. La première preſſion ſe tranſmet, comme la ſeconde, au point K; & en les ajoutant enſemble, on aura $Q\,\delta y + P'\,\delta x$ pour la preſſion totale que ce même point K ſouffre de la part du fluide MNK. De même, en vertu de la force P la preſſion de la colonne MH ſur le point H eſt $P\,\delta x$; & en vertu de la force Q' la preſſion de la colonne HK ſur le point K eſt $Q'\,\delta y$. Ajoutant enſemble ces deux preſſions, on aura $P\,\delta x + Q'\,\delta y$ pour la preſſion totale que le point K ſouffre de la part du fluide MHK. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le point K ſoit également preſſé par le fluide MNK, & par le fluide MHK. On aura donc $Q\,\delta y + P'\,\delta x = P\,\delta x + Q'\,\delta y$, & par conſéquent $(P' - P)\,\delta x = (Q' - Q)\,\delta y$. Mais il eſt évident que $P' - P$ eſt la différentielle de P; & qu'en prenant cette différentielle il faut

ſimplement faire varier y, puiſque du point M au point infiniment voiſin N, x & t demeurent conſtans : de même, $Q' - Q$ eſt la différentielle de Q, qu'il faut prendre en ne faiſant ſimplement varier que x. Donc en ſuppoſant $P' - P = A\,\delta y$, $Q' - Q = A'\,\delta x$, on aura $A\,\delta y . \delta x = A' . \delta x . \delta y$, ou $A = A'$. Par conſéquent l'état d'équilibre demande que *la différentielle de* P, *priſe en ne faiſant varier que* y, *&* *diviſée par* δ y, *ſoit la même que la différentielle de* Q, *priſe en ne faiſant varier que* x, *&* *diviſée par* δ x.

On énonce ordinairement cette propoſition d'une manière commode & abrégée que voici, $\left(\frac{\delta P}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)$, ou ce qui revient au même, $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ *.

III. Il eſt également facile de trouver les conditions de l'équilibre, quand les forces qui agiſſent ſur le fluide, ne ſont pas dans un même plan. Car quelques directions que ces forces aient, elles peuvent toujours être réduites à trois, dont deux ſoient ſituées dans le plan EPM, & la troiſième ſoit perpendiculaire au même plan. Suppoſons donc que le point M éprouve l'action de trois forces P, Q, R, de même nature que les forces P, Q, du n.° précé-

* J'emploie des parenthèſes, à la manière de M. Euler, pour diſtinguer une quantité de ce genre d'avec le quotient d'une différentielle diviſée par une autre différentielle.

dent, & parallèles chacune à chacune des trois coordonnées rectangles x, y, z. Concevons ensuite huit points fluides M, N, K, H, Q, O, S, R, formant un parallélipipède rectangle qu'on peut regarder comme composé de six canaux rectangulaires. Le fluide sera en équilibre dans chacun de ces canaux. Ainsi l'équibre dans le canal $MNKH$ donnera $(\frac{dP}{dy}) = (\frac{dQ}{dx})$; l'équilibre dans le canal $MOQH$ donnera $(\frac{dP}{dz}) = (\frac{dR}{dx})$; & l'équilibre dans le canal $MNSO$ donnera $(\frac{dQ}{dz}) = (\frac{dR}{dy})$. Les trois autres canaux donneroient les mêmes équations. On a donc en général les conditions de l'équilibre d'un fluide soumis à des forces quelconques.

IV. Tout cela posé, que le fluide $ABCD$ (*Fig. 14.*) soumis à l'action de la pesanteur se meuve dans le vase qui le contient, suivant telle loi qu'on voudra, de manière cependant que chaque point M n'ait que deux mouvemens, l'un vertical ou parallèle à EP, l'autre horizontal ou parallèle à PM. On appliquera sans peine, au moyen du n.° précédent, la même théorie à l'hypothèse où les particules du fluide auroient, outre le mouvement vertical, deux mouvemens horizontaux perpendiculaires entr'eux ; ce qui est le cas le plus composé du problème, puisqu'on peut toujours réduire un mouvement quelconque aux trois dont Fig. 14.

nous parlons. Ici je n'en confidère que deux, pour fimplifier le calcul.

Soient, comme dans le n.° II, quatre points fluides *M, N, K, H* formant un parallélogramme rectangle; qu'au bout d'un inftant ils parviennent refpectivement en *m, n, k, h;* & foient menées à l'axe *E P,* les perpendiculaires *mp, nf, hg, kq.*

Suppofons:

La gravité	=	g,
EP	=	x,
PM	=	y,
PO	=	z,
Le temps	=	t,
La viteffe du point *M* parallèlement à EP	=	u,
La viteffe du même point parallèlement à PM	=	v.

Les vîteffes u & v varient, à mefure que les coordonnées x & y, & le temps t varient: elles font donc en général des fonctions de x, y & t. Pour déterminer la nature de ces fonctions, on obfervera que le fluide étant fuppofé couler dans un vafe, on a $\frac{u}{y} = \frac{dx}{dz}$, lorfque $y = z$. Or, $\frac{dx}{dz}$ eft une fonction de x & z, donnée par la figure du vafe, & indépendante du temps. Il faut donc que les quantités u & v foient telles qu'en faifant $y = z$, la fonction du temps qu'elles renferment, difparoiffe. Il y a plufieurs moyens analytiques de fatisfaire à cette condition : car foient, par exemple, $u = M\theta + M'\theta' + M''\theta'' +$ &c.; $v = N\theta + N'\theta' + N''\theta'' +$ &c; ($\theta, \theta', \theta''$ étant

des fonctions du temps; M & N des fonctions quelconques de y & z; M', N', M'', N'', d'autres fonctions de x & z, telles qu'elles s'évanouissent lorsque $y = z$). Il est clair qu'on aura $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$. $= \frac{M}{N}$ fonction de x & z, lorsque $y = z$. Mais, sans examiner en détail toutes les espèces de fonctions qu'on peut employer analytiquement dans cette recherche, je m'en tiens à la supposition $u = M\theta$, $v = N\theta$, qui est très-générale & qui suffit pour rendre raison du mouvement d'un fluide qui coule dans un vase, tel que nous le considérons ici. Si le fluide avoit une étendue assez grande pour qu'on pût le regarder comme indéfini, les vîtesses u & v ne seroient pas assujetties à la condition que nous venons d'exposer; mais alors il faudroit supposer d'autres conditions équivalentes, comme, par exemple, que le mouvement du fluide parvient, par une cause quelconque, à un état constant & tel que pour les mêmes coordonnées x & y, les quantités M & N ont les mêmes valeurs; sans quoi le problème demeureroit indéterminé.

V. Soient $du = d(\theta M) = \theta A dx + \theta B dy + M.T dt$; $dv = d(\theta N) = \theta A' dx + \theta B' dy + N.T dt$; A, B, A', B' étant des fonctions de x & de y, T une fonction du temps, dx & dy les espaces parcourus verticalement & horizontalement par le point M, durant l'instant dt. En mettant pour dx sa valeur $u dt$ ou $\theta M dt$, &

pour dy sa valeur $v\,dt$ ou $\theta\, N\,dt$, on aura la force verticale $\frac{du}{dt} = \theta^2 A.M + \theta^2 B.N + M.T$; & la force horizontale $\frac{dv}{dt} = \theta^2 A'.M + \theta^2 B'.N + N.T.$ Or, 1.° si les particules n'agissoient point les unes sur les autres, la vîtesse verticale u deviendroit à la fin de l'instant dt, $u + g\,dt$. Donc, par le principe de Dynamique de M. d'Alembert, si l'on regarde la vîtesse $u + g\,dt$ comme composée des deux vîtesses $u + du$ & $g\,dt - du$; & si l'on considère que de ces deux vîtesses, la première est la seule qui subsiste, il est clair que la seconde $g\,dt - du$ doit être telle qu'elle ne change rien à la première, & qu'elle soit anéantie. 2.° On verra de même, à l'égard de la vîtesse horizontale v, qu'en vertu de la vîtesse $-dv$, le point M devroit être en équilibre. Par conséquent, si le point M étoit soumis à chaque instant à l'action des deux forces $g - \frac{du}{dt}$, $- \frac{dv}{dt}$, il demeureroit en équilibre; ce qui donne (N.° II) l'équation fondamentale $\left(\frac{d[g - (\theta^2 A.M + \theta^2 B.N + M.T)]}{dy}\right)$ $= \left(\frac{d[-\theta^2 A'.M - \theta^2 B'.N - N.T.]}{dx}\right)$.

VI. Comme le fluide est supposé incompressible, le rectangle $MNKH$, en passant dans la position $mnkh$, occupe toujours le même espace. Il faut donc trouver l'expression de l'aire $mnkh$ & l'égaler à celle du rectangle $MNKH$. Pour

cela, on observera que dans l'instant dt le point M parcourt parallèlement à EP un petit espace $= u\,dt$, & parallèlement à ED un petit espace $= v\,dt$; de plus, puisque les différentielles dy, δy ont le même coéfficient, on voit qu'au point N auquel répond l'ordonnée $y + \delta y$, la vîtesse u devient $u + \theta\, B \delta y$, & la vîtesse v devient $v + \theta . B' \delta y$; ainsi le point N parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . B \delta y)\, dt$; & parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . B' \delta y)\, dt$. De même, les différentielles dx & δx ayant le même coéfficient, on trouve que le point H parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . A \delta x)\, dt$, & parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . A' \delta x)\, dt$; qu'enfin le point K parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . A \delta x + \theta . B \delta y)\, dt$, & parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . A' \delta x + \theta . B' \delta y)\, dt$. Ainsi, Ep & pm, Ef & fn, Eg & gh, Eq & qk, étant supposées les coordonnées des points m, n, h, k, on aura pour les abscisses, $Ep = x + u\,dt$; $Ef = x + (u + \theta . B \delta y)\, dt$; $Eg = x + \delta x + (u + \theta . A \delta x)\, dt$; $Eq = x + \delta x + (u + \theta . A \delta x + \theta . B \delta y)\, dt$; & pour les ordonnées, $pm = y + v\,dt$; $fn = y + \delta y + (v + \theta . B' \delta y)\, dt$; $gh = y + (v + \theta . A' \delta x)\, dt$; $qk = y + \delta y + (v + \theta . A' \delta x + \theta . B' \delta y)\, dt$. Or, puisqu'il résulte de ces expressions que la différence des deux lignes Ep & Ef, celle des deux lignes Eg & Eq,

celle des deux lignes $p\,m$ & $f\,n$, celle des deux lignes $g\,h$ & $q\,k$, sont des infiniment petits du second ordre, il s'ensuit que les lignes $m\,n$, $h\,k$ peuvent être regardées comme parallèles à $E\,D$, & les lignes $m\,h$, $n\,k$ comme parallèles à $E\,P$. Donc le quadrilatère $m\,n\,k\,h$ peut être consideré comme un rectangle dont la surface $= m\,h \times m\,n = (E\,g - E\,p) \times (f\,n - p\,m)$, sensiblement : & comme il doit être égal au rectangle MNK, on aura l'équation $\delta x . \delta y = (\delta x + \theta . A \delta x\, d\,t) \times (\delta y + \theta . B' \delta y\, d\,t)$; d'où l'on tire, en effaçant ce qui se détruit & négligeant les infiniment petits du troisième ordre, $\theta A \delta x \delta y\, d\,t + \theta . B' \delta x \delta y\, d\,t = 0$; ou $A = - B'$; ou, ce qui revient au même, $(\frac{d\,M}{d\,x}) = -(\frac{d\,N}{d\,y})$; première équation de condition entre M & N, par laquelle on voit que $N\,d\,x - M\,d\,y$ doit être une différentielle complète.

VII. L'équation fondamentale du numéro V, devant être identique (N.° II), il faut que la partie $(\frac{d\,(M.T)}{d\,y})$ du premier nombre soit égale à la partie correspondante $(\frac{d\,(N.T)}{d\,x})$ du second. Ainsi, à cause de T constant dans ces expressions, on aura $(\frac{d\,M}{d\,y}) = (\frac{d\,N}{d\,x})$: seconde équation de condition entre M & N, par laquelle on voit que $M\,d\,x + N\,d\,y$ doit être une différentielle complète.

VIII. Il est facile de s'assurer *à posteriori*, que les deux équations $(\frac{dM}{dx}) = -(\frac{dN}{dy})$, $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$ remplissent les conditions de l'équilibre, ou satisfont entièrement à l'équation fondamentale proposée. Car puisqu'on a $(\frac{d(M.T)}{dy}) = (\frac{d(N.T)}{dx})$ le reste de cette équation donnera (θ étant ici constant), $A(\frac{dM}{dy}) + M(\frac{dA}{dy}) + B(\frac{dN}{dy}) + N(\frac{dB}{dy}) = A'(\frac{dM}{dy}) + M(\frac{dA'}{dx}) + B'(\frac{dN}{dx}) + N(\frac{dB'}{dx})$.

Or, puisqu'on a $A = (\frac{dM}{dx})$, $B = (\frac{dM}{dy})$, $A' = (\frac{dN}{dx})$, $B' = (\frac{dN}{dy})$, on aura $A(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dM}{dx}) \times (\frac{dM}{dy})$; $B(\frac{dN}{dy}) = (\frac{dM}{dy}) \times (\frac{dN}{dy}) = -(\frac{dM}{dy}) \times (\frac{dM}{dx})$; $A'(\frac{dM}{dx}) = (\frac{dN}{dx}) \times (\frac{dM}{dx})$; $B'(\frac{dN}{dx}) = (\frac{dN}{dy}) \times (\frac{dN}{dx}) = -(\frac{dM}{dx}) \times (\frac{dN}{dx})$; $M(\frac{dA}{dy}) = M\left(\frac{d(\frac{dM}{dx})}{dy}\right)$; $M(\frac{dA'}{dx}) = M\left(\frac{d(\frac{dN}{dx})}{dx}\right) = M\left(\frac{d(\frac{dM}{dy})}{dx}\right)$, expression qui par la nature du calcul différentiel, est la même chose que

$M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}\right)$; $N\left(\frac{dB}{dy}\right) = N\left(\frac{\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right)$;

$N\left(\frac{dB'}{dx}\right) = N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx}\right) = N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy}\right)$

$= N\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right)$. Subſtituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera que tous ſes termes ſe détruiſent, & que par conſéquent elle eſt identique.

IX. *Remarque.* Il y a un cas où l'équation $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, réſultante de l'hypothèſe $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right) = \left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$, n'a pas lieu néceſſairement. Cela arrive lorſque la fonction T du temps eſt un multiple de θ°. En effet, ſuppoſons $T = b\,\theta^\circ$, b étant un coëfficient conſtant : l'équation fondamentale du N.° V devient (en diviſant tout par θ°), $\left(\frac{d(g - A.M - B.N - M.b)}{dy}\right)$
$= \left(\frac{d(-A'.M - B'N - Nb)}{dx}\right)$; c'eſt-à-dire,
$-M\left(\frac{dA}{dy}\right) - A\left(\frac{dM}{dy}\right) - N\left(\frac{dB}{dy}\right)$
$- B\left(\frac{dN}{dy}\right) - b\left(\frac{dM}{dy}\right) = -M\left(\frac{dA'}{dx}\right)$
$- A'\left(\frac{dM}{dx}\right) - N\left(\frac{dB'}{dx}\right) - B'\left(\frac{dN}{dx}\right)$
$- b\left(\frac{dN}{dx}\right)$; ou bien (en mettant pour

A,

A, B, A', B', leurs valeurs $(\frac{dM}{dx})$, $(\frac{dM}{dy})$, $(\frac{dN}{dx})$, $(\frac{dN}{dy})$, & effaçant les termes qui se détruisent en vertu de l'équation $(\frac{dM}{dx}) = -(\frac{dN}{dy})$, qui a toujours lieu N.° VI).

$$M(\frac{dA}{dy}) + N(\frac{dB}{dy}) + b(\frac{dM}{dy}) = M(\frac{dA'}{dx}) + N(\frac{dB'}{dx}) + b(\frac{dN}{dx}):$$

équation aux différences partielles du premier ordre, à laquelle il faudra satisfaire, de même qu'à l'équation $(\frac{dM}{dx}) = -(\frac{dN}{dy})$, pour représenter le mouvement du fluide dans le cas dont il s'agit.

La valeur de la fonction θ du temps est ici donnée immédiatement ; car puisqu'on a en général $d\theta = T\,dt$ (N.° V), & qu'on suppose maintenant $T = b\theta^2$; nous aurons $d\theta = b\theta^2 dt$; d'où l'on tire $\theta = \frac{1}{a - bt}$. Or, si l'on suppose que le fluide soit animé, seulement par la pesanteur, & que les vîtesses u & v soient zéro, lorsque $t = 0$, on voit qu'à cause des équations $u = M\theta$, $v = N\theta$, la fonction θ du temps sera aussi $= 0$, lorsque $t = 0$. Donc alors l'équation $\theta = \frac{1}{a - bt}$ ne peut pas avoir lieu, puisque θ n'est pas zéro, lorsque $t = 0$. Mais, si au premier instant, le fluide a reçu une

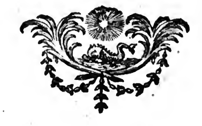
X

impulſion quelconque, par exemple, s'il a été mis en mouvement par l'action d'un piſton; l'équation $\theta = \frac{1}{a - bt}$ ſera admiſſible; & les vîteſſes initiales du fluide ſeront $\frac{M}{a}$, $\frac{N}{a}$.

IX. SCHOLIE GÉNÉRAL. Dans la recherche générale des fonctions M, N, θ, on obſervera 1.° que les valeurs de ces fonctions doivent être compatibles avec l'équation qui exprime la figure du vaſe. 2.° Que les réſultantes des forces perdues $g - \frac{du}{dt}$, $-dv$, doivent être perpendiculaires aux ſurfaces ſupérieure & inférieure du fluide, puiſque ſi ces forces exiſtoient ſeules, le fluide ſeroit en équilibre, & que dans un fluide en équilibre les forces qui agiſſent à ſa ſurface ſont néceſſairement perpendiculaires à cette ſurface. 3.° Que les réſultantes dont il s'agit agiſſent de haut en bas pour la ſurface ſupérieure du fluide, & de bas en haut pour la ſurface inférieure; autrement les parties du fluide ſe détacheroient, & il ne formeroit plus une maſſe continue, comme on le ſuppoſe dans la ſolution du problême. 4.° Que la théorie dont il s'agit a principalement lieu pour les vaſes qui vont en ſe rétréciſſant de haut en bas, ou qui du moins s'éloignent peu de la forme priſmatique, ſoit dans un ſens, ſoit dans l'autre; car, dans un vaſe qui va en s'élargiſſant conſidérablement de haut en bas, il doit arriver ſouvent que le fluide

abandonne les parois; & alors les particules tombent comme des corps détachés.

Je me contente d'indiquer ces remarques générales. Si je voulois en développer les applications & les conséquences, il me faudroit un espace beaucoup plus grand que je ne puis le donner ici à des objets de simple curiosité. Les Lecteurs qui voudront faire une étude plus particulière de toutes ces théories, pourront consulter les Ouvrages que j'ai cités au commencement de ce chapitre.



CHAPITRE VI.

De l'écoulement des fluides qui sortent de vases composés, ou de vases partagés en compartimens par des cloisons.

(248.) LES besoins de la pratique, mon objet principal, exigeant nécessairement toute la simplicité possible dans les calculs, même aux dépens d'une grande précision, me forcent ici, comme ailleurs, de revenir presque toujours à l'hypothèse où les écoulemens se font par de petits orifices; hypothèse qui entraîne ou admet celle d'une vîtesse dûe à la hauteur réelle & libre du fluide au-dessus de l'orifice. On verra que nonobstant cette supposition, il se rencontre encore, dans les problèmes suivans, plusieurs cas où les opérations analytiques sont fort compliquées.

Fig. 15. (249.) PROBLÈME I. *L'eau étant entretenue constamment* (Fig. 15) *au même niveau* A D *(par l'affluence d'une rivière, d'une source ou de toute autre manière), dans un vase composé de deux autres* A B C D, G H K I, *dont l'inférieur est percé à son fond ou à ses parois d'une petite ouverture* p q, *par laquelle l'eau s'échappe continuellement : on demande la quantité d'eau qui sortira en un temps proposé !*

L'orifice pq étant regardé comme infiniment

petit par rapport aux amplitudes ou ſections horizontales des deux vaſes compoſans *A B C D, G H K I*, il eſt clair que l'écoulement eſt le même que ſi au vaſe compoſé on ſubſtitue le vaſe ſimple *A E F D*; d'où il ſuit que ce problème ſe rapporte à celui de l'article 201.

(250.) PROBLÈME II. *Suppoſons maintenant que les deux vaſes compoſans* A B C D, G H K I, *ſoient verticaux & priſmatiques : que la ſurface de l'eau étant d'abord en* A D, *le vaſe compoſé ſe vide par l'orifice* p q, *ſans recevoir de nouvelle eau : on demande le temps que la ſurface de l'eau met à s'abaiſſer d'une hauteur quelconque ?*

La vîteſſe en pq étant dûe, à chaque inſtant, à la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice, & l'écoulement étant évidemment le même, tant que le fluide eſt dans le vaſe ſupérieur, que ſi au vaſe compoſé on ſubſtituoit le ſimple vaſe priſmatique vertical *AEFD*: il s'enſuit (209) qu'en déſignant le temps que la ſurface de l'eau met à parcourir un certain eſpace par la lettre T écrite au-devant de cet eſpace ; & nommant A l'aire de chaque ſection horizontale du vaſe *A B C D*; *K*, celle de l'orifice pq; θ, le temps de la chute par a: on aura, $T.AL = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{LE})}{K\sqrt{a}}$: & $T.AB = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{BE})}{K\sqrt{a}}$.

Quand la ſurface du fluide eſt parvenue dans le vaſe inférieur, par exemple en *NP*, l'écoulement

ſe fait dans un vaſe ſimple ; & on a (en nommant B chaque ſection horizontale de ce vaſe $GHKI$),

$$T.GN = \frac{\theta B(\sqrt{GH} - \sqrt{NH})}{K\sqrt{a}}.$$

Ajoutant ce temps avec celui qui a été employé à parcourir AB, on aura,

$$T.AQ = \frac{\theta A(\sqrt{AE} - \sqrt{BE}) + \theta B(\sqrt{BE} - \sqrt{BQ})}{K\sqrt{a}}.$$

Le problème ne feroit pas plus difficile à réſoudre, quant aux élémens de la queſtion (204), ſi les deux vaſes compoſans avoient toute autre figure.

(251.) *Remarque I.* Selon l'expérience, tant que le fluide conſerve une certaine hauteur au-deſſus de BC dans le vaſe ſupérieur, la vîteſſe en pq eſt dûe, au moins ſenſiblement, à la hauteur entière du fluide au-deſſus de pq, même lorſque pq augmente juſqu'à devenir égal au fond HK, pourvu néanmoins que le tuyau $GHKI$ ſoit fort mince par rapport au vaſe ſupérieur $ABCD$, & que de plus la hauteur GH ſoit fort petite. Le temps que la ſurface du fluide met à deſcendre dans le vaſe ſupérieur, de AD en BC, peut donc encore alors ſe déterminer comme dans l'article précédent. Mais quand le fluide eſt parvenu dans le tuyau $GHKI$, & que l'orifice $pq = HK$, la maſſe d'eau $GHKI$ tombe tout d'une pièce, à la manière des corps peſans. Si l'on veut connoître le temps qu'elle met à s'écouler entièrement, ou ce qui revient au même, le temps que la ſurface GI de l'eau emploie à parcourir GH, on obſervera

qu'au premier instant de ce mouvement, la surface GI a une vîtesse initiale, qui est (193) à la vîtesse en HK, comme B est à A, au moins à peu-près. Soit XG la hauteur dûe à cette vîtesse initiale : on trouvera, par les formules ordinaires des mouvemens variés, $udu = \phi ds$, $dt = \frac{ds}{u}$, que le temps dont il s'agit est égal à l'excès du temps de la chute d'un corps grave par XH, sur le temps de la chute par XG.

(252.) REMARQUE II. Il seroit facile de résoudre le problème précédent, par le principe du mouvement parallèle des tranches, sans s'astreindre à la supposition que l'orifice pq est comme infiniment petit. Car soit LM la surface de l'eau dans le vase supérieur; & nommons z la hauteur indéterminée HS de cette surface au-dessus de l'orifice; b, la hauteur du tube GH. En appliquant ici l'équation générale de l'article 234, la quantité N sera $\frac{z-b}{A} + \frac{b}{B}$; M sera A, du moins sensiblement, pour le vase supérieur, & deviendra B pour le vase inférieur; de sorte que si nous la représentons constamment par M, l'équation différentielle entre z & s, dans les deux cas, est de cette forme, $M^2 z dz + \frac{K^2(z-b)Mds}{A} + \frac{K^2 bMds}{B} + sdz(K^2 - M^2) = 0$. Cette équation s'intègre par la méthode du même article cité. Nous en tirerons d'abord, pour le vase

supérieur, la relation entre z & s, & l'expression du temps que la surface de l'eau met à descendre de AD en BC. Ensuite nous passerons à la considération de l'écoulement dans le vase inférieur, en observant qu'au moment où la surface de l'eau entre dans ce vase, elle a une vîtesse connue, à laquelle il faut avoir égard dans l'intégration de l'équation différentielle entre z & s; ce qui influe aussi sur l'équation entre z & t. Connoissant $T.AB$ & $T.BQ$, on connoîtra $T.AQ$.

(253.) PROBLÈME III. *Les vases* ABCD, Fig. 16. FCEG, HEKL (Fig. 16), *étant supposés communiquer ensemble par les petites ouvertures* C, E, *& le fluide s'échappant dans l'air par la petite ouverture* L *du dernier: on demande les hauteurs dûes aux vîtesses en* C, E, L, *& la quantité de l'écoulement, lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité, & que par conséquent le premier vase recevant autant d'eau qu'il en sort par l'ouverture* L, *les hauteurs* AB, CF, EH *demeurent constamment les mêmes!*

Puisque les ouvertures C, E, L sont regardées comme infiniment petites par rapport aux amplitudes des vases, il est évident que la petite masse qui passe à chaque instant du premier vase dans le second, & celle qui passe du second dans le troisième, ne peuvent occasionner, en vertu de ces mouvemens, qu'un ébranlement insensible dans le fluide choqué, & que par conséquent la loi de continuité est observée, du moins sensiblement,

d'un fluide à l'autre. Or, si ayant prolongé les surfaces GF, KH des deux fluides $FCEG$, $HELK$, jusques en O & Q, on observe que les deux fluides $CFOB$, $CFGE$, qui communiquent ensemble par l'ouverture C, se font équilibre (21) : que pareillement les deux fluides $EHQC$, $EHKL$ se font équilibre : on verra que dans l'hypothèse du problème, la vîtesse en C est simplement dûe à la hauteur DF; la vîtesse en E, à la hauteur GH; & la vîtesse en L, à la hauteur KL.

Soient
- AB .... $= h$,
- DF .... $= x$,
- GH .... $= y$,
- KL .... $= z$,
- Chacune des quantités égales d'eau qui passent pendant le temps t de l'écoulement, par chacune des trois ouvertures C, E, L .... $= Q$.

Nommons de plus θ le temps de la chute d'un corps grave par a.

On aura (201), $Q = \frac{2tC\sqrt{ax}}{\theta}$, $Q = \frac{2tE\sqrt{ay}}{\theta}$, $Q = \frac{2tL\sqrt{az}}{\theta}$. De plus $x + y + z = h$. Ces équations comparées ensemble donnent, pour les quatre inconnues x, y, z, Q, les valeurs suivantes,

$$x = h \times \frac{L^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$y = h \times \frac{C^2 L^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$z = h \times \frac{C^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$Q = \frac{2 t L . \sqrt{a h}}{\theta} \times \frac{C E}{\sqrt{[C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2]}}.$$

Ces formules contiennent tout ce qui eſt relatif à l'écoulement propoſé, & fourniſſent des queſtions analogues à celles qu'on a traitées dans l'article 202.

Le problème ſe réſoudroit de la même manière, s'il y avoit un plus grand nombre de vaſes.

(254.) *REMARQUE.* L'écoulement par les ouvertures *C, E, L,* ne devient uniforme, ou, ce qui en eſt la cauſe, les hauteurs du fluide qui produiſent l'écoulement, ne parviennent à demeurer conſtamment les mêmes, qu'au bout d'un certain temps. Reſte donc à examiner la loi ſuivant laquelle le fluide monte dans les vaſes *FE, HL* au commencement du mouvement, & avant que l'écoulement ſoit devenu régulier & permanent. Je commence par conſidérer ſimplement deux vaſes, & je les ſuppoſe priſmatiques, pour la plus grande facilité du calcul.

(255.) PROBLÈME IV. *Les deux vaſes priſmatiques* ABCD, FCEG (Fig. 17), *communiquant enſemble par la petite ouverture* C, *& le ſecond laiſſant échapper l'eau par la petite ouverture* E, *tandis que le premier eſt entretenu conſtamment plein à la hauteur* CD: *on demande la poſition de la ſurface de l'eau dans le vaſe* FCEG, *au bout d'un certain temps?*

Fig. 17.

Suppoſons qu'au bout du temps propoſé *t*, la

surface de l'eau soit parvenue en NO dans le vase $FCEG$, & qu'en un instant elle prenne la position infiniment voisine no. Nommons θ le temps de la chute par a; h, la hauteur donnée CD; x, la hauteur DN; A, l'aire de la base ou de la section horizontale du vase CG. Il est évident que dans l'instant dt, x est la hauteur dûe à la vîtesse du fluide en C, & $h-x$ la hauteur dûe à la vîtesse en E. Il n'est pas moins clair (201) que dans ce même instant il sort par l'ouverture C une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Cdt.\sqrt{ax}}{\theta}$, & par l'ouverture E, une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Edt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$. Or, la différence de ces deux quantités est évidemment égale à $NOon$. Ainsi, on aura $\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta} = -Adx$; d'où l'on tire, $dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{a}} \times \frac{dx}{E\sqrt{(h-x)}-C\sqrt{x}}$.

Pour intégrer cette équation, on fera d'abord $x = \frac{yy}{h}$, puis $E\sqrt{(hh-yy)} - Cy = Ez$; & par-là on obtiendra une équation de cette forme, $dt = Mdz + \frac{Nzdz}{\sqrt{(P^2-z^2)}} + \frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$; M, N, P, Q étant des quantités constantes, faciles à déterminer. L'intégration est maintenant fort aisée. Le dernier terme $\frac{Qdz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$,

le seul qui puisse faire quelque difficulté, s'intègre en supposant $z = \frac{P^2}{u}$; ce qui donne $\frac{Q\,dz}{z\sqrt{(P^2 - z^2)}}$

$$= \frac{-Q\,du}{P\sqrt{(u^2 - P^2)}} = \frac{-Q}{P}\left(\frac{du + \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2 - P^2)}}}{u + \sqrt{(u^2 - P^2)}}\right),$$

dont l'intégrale est $-\frac{Q}{P} L.[u + \sqrt{(u^2 - P^2)}]$.

On trouvera donc toujours la valeur de t en x. Je n'écris pas ici tous ces calculs qui sont un peu longs, mais qui n'ont d'ailleurs aucune difficulté.

Il faut observer qu'au commencement du mouvement, le fluide doit avoir une certaine hauteur dans le vase CG, pour que l'eau qui passe du vase $ABCD$ dans l'eau CO, n'y cause pas d'ébranlement sensible. On satisfera à cette condition, en déterminant la constante qui entre dans l'intégrale du temps, de manière que quand $t = o$, DN ait une valeur *donnée* & un peu moindre que h.

Fig. 18. (256.) SCHOLIE. Qu'on ait maintenant *(Fig. 18)*, tant de vases prismatiques qu'on voudra, $ABCD$, $FCGE$, $HELK$, $QLMR$, qui commuiquent ensemble, & dont le dernier laisse échapper l'eau dans l'air. Que le premier soit entretenu constamment plein, & qu'au bout du temps t les surfaces des eaux soient en NO, PS, QR, dans les autres. Soient $DC = h$; $DN = x$; $OP = y$; $SQ = z$; $RM = q$; la base du vase $CG = A$; celle du vase $EK = B$; celle du vase $LR = R$: il est

évident qu'on aura ces différentes équations,

$$\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{ay}}{\theta} = -Adx;$$

$$\frac{2Edt\sqrt{ay}}{\theta} - \frac{2Ldt\sqrt{az}}{\theta} = -B(dy+dx);$$

$$\frac{2L'dt\sqrt{az}}{\theta} - \frac{2Mdt\sqrt{aq}}{\theta} = +Rdq.$$

De plus, on a toujours $x+y+z+q=h$. Toutes ces équations combinées ensemble serviront à trouver la valeur de t en x, ou en y, ou en z, ou en q, & à connoître par conséquent les hauteurs auxquelles le fluide parvient dans les vases CG, EK, LR, en un temps proposé. Mais on voit que ces calculs sont fort compliqués.

(257.) PROBLÈME V. *Un vase prismatique* FCEG (Fig. 19), *étant supposé recevoir, par l'affusion d'un ruisseau, d'une source, des quantités égales d'eau, en temps égaux, & laisser échapper en partie ces eaux, par le petit orifice* E : *on demande la hauteur à laquelle l'eau s'élèvera dans le vase* FCEG *en un temps donné!* Fig. 19.

Ce problème élégant, dont M. de Montucla a donné le premier la solution, dépend des mêmes principes que celui de l'article 255. En effet, la quantité d'eau que le vase reçoit par l'affusion de la source, étant la même pour le même temps, ou étant en général proportionnelle au temps, il est clair que la quantité fournie pendant l'instant dt, peut être représentée par $\frac{2Cdt\sqrt{ab}}{\theta}$, C étant un orifice donné, & b la hauteur constamment dûe à

la vîteſſe par C. Ainſi, en ſuppoſant $CN = x$, & conſervant les autres dénominations de l'article cité, on aura l'équation, $\frac{2 C dt \sqrt{ab}}{\theta} - \frac{2 E dt \sqrt{ax}}{\theta} = A dx$; ou bien, $dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{a}} \times \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$. On intégrera facilement cette équation, en faiſant $x = \frac{yy}{b}$; & on connoîtra par conſéquent la relation demandée entre x & t.

La quantité d'eau qui ſort par l'ouverture E, pendant le temps t, eſt $\int \frac{2 E . dt \sqrt{ax}}{\theta}$, ou $E . A \int \frac{dx \sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$, intégration qui s'effectue ſans peine, en faiſant comme tout-à-l'heure, $x = \frac{yy}{b}$.

Fig. 20. (258.) PROBLÈME VI. *On ſuppoſe que le vaſe quelconque* ISTL (Fig. 20) *entretenu conſtamment plein à la hauteur* TL, *tranſmette l'eau au vaſe priſmatique* AMNC *par le moyen du petit tuyau horizontal* TM, *& on demande le temps que la ſurface de l'eau dans le vaſe* AMNC *mettra à parvenir dans une poſition quelconque* EG!

Il eſt clair (195), que lorſque l'on ouvre le robinet ou la vanne R pour faire entrer l'eau dans le vaſe $AMNC$, elle s'élance avec une vîteſſe dûe à la hauteur TL ou MA. Cette vîteſſe ſubſiſteroit toujours, ſi l'eau avoit la liberté de s'échapper, & ne reſtoit pas dans le vaſe $AMNC$.

Mais quand il y en eſt entré une certaine quantité *MKVN*, la petite maſſe qui paſſe à chaque inſtant par *M*, & qui va choquer la maſſe finie *MKVN*, perd en partie, par ce choc, ſa vîteſſe primitive, & il n'en peut réſulter aucun mouvement ſenſible dans le fluide *MKVN*. La ſurface *KV* s'élève donc alors ſuivant la même loi que ſi la vîteſſe en *M* étoit ſimplement dûe, à chaque inſtant, à la hauteur *LX*, excès de la hauteur totale *LT* ſur la hauteur *KM*; car les eaux *ZXTS*, *KVNM*, qui ſont à même hauteur, & qui communiquent enſemble par l'orifice *M* doivent être cenſées ſe faire mutuellement équilibre (21).

Cela poſé, le problème ſe réſout comme celui de l'article 209. Car ſi l'on regarde la hauteur *AK* comme donnée & comme celle du vaſe priſmatique *AKVC* qui reçoit l'eau par l'orifice *M*; qu'enſuite on nomme *A* la baſe du vaſe *MC*; *M* l'aire de l'orifice *M*; θ le temps de la chute par *a*; *t* le temps que la ſurface de l'eau emploie à parvenir de *KV* en *EG*: on aura $t = \frac{\theta A(\sqrt{AK} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{a}}$.

En effet, la vîteſſe avec laquelle l'eau monte dans le vaſe *AKVC*, eſt exactement la même que feroit, aux mêmes endroits, celle d'un fluide *AKVC* qui étant imaginé ſoumis à l'action d'une force égale à la peſanteur, mais dirigée de bas en haut, ſe videroit par un orifice pratiqué dans le fond ſupérieur *AC*, & égal à *M*. Or, il eſt viſible (209) que dans ce dernier cas le temps employé

par la ſurface du fluide à parvenir de KV en EG eſt donné par l'équation précédente. Donc cette même équation exprime le temps cherché dans l'hypothèſe du problème.

(259.) COROLLAIRE. De-là ſuit une conſéquence analogue à l'article 211. Dans le temps que le vaſe $AKVC$ met à ſe remplir entièrement, il ſortiroit, par l'orifice M, d'un vaſe entretenu conſtamment plein à la hauteur AK au-deſſus de cet orifice, une quantité double de $AKVC$; ce qui revient encore à ceci : *le temps que le vaſe* A K V C *met à ſe remplir dans l'hypothèſe du problème, eſt double de celui qu'un vaſe entretenu conſtamment plein à la hauteur* A K *au-deſſus de l'orifice* M, *emploîroit à donner, par ce même orifice, la quantité d'eau* A K V C.

(260.) *REMARQUE.* La hauteur AK que nous avons regardée comme connue, ne peut pas différer beaucoup de AM. Il ſera facile, dans chaque cas particulier, de l'eſtimer à peu de choſe près, en ayant égard à l'étendue du fond MN. Lorſqu'on voudra déterminer le temps total que l'eau met à parvenir de M en E, on pourra s'y prendre ainſi, ſans craindre d'erreur ſenſible. Ayant fixé MK à un petit nombre *connu* de pouces, 1.° on cherchera (202) le temps que la quantité d'eau $KMNV$ emploie à ſortir par l'orifice M, en ſuppoſant que la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice eſt conſtamment LT; 2.° on cherchera

par

par la formule précédente, le temps que l'eau met à parvenir de *K* en *E*. Ajoutant enſemble ces deux temps, la ſomme ſera le temps demandé, du moins à très-peu de choſe près.

(261.) SCHOLIE. Le problème précédent s'applique à la pratique, lorſqu'ayant une vaſte pièce d'eau & un petit réſervoir latéral, qui peuvent communiquer enſemble au moyen d'un pertuis bouché par une vanne qu'on ſoulève alors, on veut connoître le temps que le réſervoir met à ſe remplir. Il peut ſervir auſſi à déterminer l'écoulement d'un ſas d'écluſe dans un autre, lorſque le premier ſas eſt comme infini par rapport au ſecond; mais pour l'ordinaire les deux ſas ont entr'eux un rapport fini. Je ſuppoſe donc que le ſas ſupérieur, dont la quantité d'eau eſt déterminée, venant à communiquer par un tuyau ou par un acqueduc ſouterrain, avec le ſas inférieur, celui-ci perd une petite partie de l'eau, ſoit par les fentes des portes d'écluſe, ſoit par quelque gerſure dans la maçonnerie; & je réduis, en ce cas, la queſtion au problème ſuivant.

(262.) PROBLÈME VII. *Le réſervoir* ISTL (Fig. 21) *rempli d'abord juſqu'en* IL *ſe vide par le petit tuyau* T M *qui communique avec un ſecond réſervoir* A M N C *contenant, au premier inſtant, de l'eau juſqu'en* D E, *& qui en laiſſe échapper par l'ouverture* N. *On ſuppoſe qu'au bout d'un certain temps les deux ſurfaces de l'eau dans les deux réſervoirs ſoient* Fig. 21.

parvenues respectivement en QP & KV; *& on demande la relation des hauteurs verticales* QH, KX, *ainsi que l'expression du temps de l'écoulement!*

Soient $KX = x$; $KV = X$, fonction de x, donnée par la figure du vase $AMNC$; $QH = y$; $QP = Y$, fonction de y, donnée par la figure du vase $ISTL$; l'aire de l'orifice $M = M$; celle de l'orifice $N = N$; l'élément du temps $= dt$; θ le temps de la chute par a. La hauteur dûe à la vîtesse de l'eau en M étant QF ou $y - x$, il est clair (201) que dans l'instant dt le vase $ISTL$ dépense une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta}$ laquelle a, pour autre valeur, $-Ydy$. On a donc cette première équation, $dt = \frac{-\theta Ydy}{2M\sqrt{[a(y-x)]}}$.

De plus, si de la quantité d'eau $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta}$ que le vase $ISTL$ fournit, à chaque instant, au vase $AMNC$, on retranche la dépense $\frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$ que celui-ci fait par l'orifice N, le reste $\frac{2Mdt\sqrt{[a(y-x)]}}{\theta} - \frac{2Ndt\sqrt{ax}}{\theta}$ sera évidemment l'incrément de l'eau dans le vase $AMNC$, incrément qui a pour autre valeur Xdx. Ainsi, on aura cette seconde équation $dt = \frac{\theta Xdx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x})}$.

Comparant les deux valeurs de dt, on aura

$$\frac{Ydy}{M\sqrt{[y-x]}} + \frac{Xdx}{M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x}} = 0,$$

équation fondamentale qu'il faudroit intégrer pour en tirer la relation de x à y, & pour parvenir ensuite à l'expression du temps. Cette intégration ne peut pas se faire en général.

(263.) COROLLAIRE I. Lorsque les deux vases sont ou peuvent être censés prismatiques, ce qui a lieu ordinairement dans les sas d'écluse; l'équation devient homogène, & par conséquent séparable, parce qu'alors Y & X sont des quantités constantes. Soient donc, en ce cas, $Y = A$, $X = B$. On aura $\frac{A\,dy}{M\sqrt{[y-x]}} + \frac{B\,dx}{M\sqrt{[y-x]} - N\sqrt{x}} = 0$. D'où l'on tire, en faisant d'abord $y = xz$, puis $z - 1 = uu$,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A(N\,du - Mu^2\,du)}{M.A.u^3 - N.A.u^2 + (M.A + B.M)u - N.A},$$

équation rationnelle, & par conséquent intégrable par des méthodes connues.

On voit par-là qu'en général les deux réservoirs étant prismatiques, x & y peuvent toujours être exprimées en fonctions d'une même variable, & que par conséquent on aura aussi t en fonctions de la même variable.

(264.) COROLLAIRE II. Il y a un cas très-simple, & qui arrive souvent dans la pratique. Supposons que pendant que l'eau du sas supérieur *ISTL* passe dans l'inférieur *AMNC* (l'un & l'autre étant toujours prismatiques), le dernier ne perde point d'eau, ou du moins n'en perde qu'une quantité très-petite & négligeable. Alors

on pourra faire $N = 0$; & en complétant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $y = HO = h$, hauteur donnée, & $x = XZ = b$, hauteur aussi donnée : on trouvera $Ay + Bx = Ah + Bb$. Donc $dt = \frac{-\theta Y dy}{2M\sqrt{a}.\sqrt{[y-a]}}$ $= \frac{-\theta A dy \sqrt{B}}{2M\sqrt{a}.\sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}}$ dont l'intégrale complétée, de manière que $t = 0$ donne $y = h$, est $t = \frac{\theta A \sqrt{B}}{M(B+A)\sqrt{a}}$ $\times [\sqrt{(Bh - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}]$.

Pour déterminer le moment où l'eau se met de niveau dans les deux sas, il faut faire $x = y$ $= \frac{Ah + Bb}{A + B}$, & alors on trouve :

$$t = \theta \times \frac{A.B}{M(B+A)} \times \frac{\sqrt{[h-b]}}{\sqrt{a}},$$

expression simple & commode dans la pratique.

Lorsque $A = B$, cette expression devient :

$$t = \theta \times \frac{A}{2M} \times \frac{\sqrt{[h-b]}}{\sqrt{a}}.$$



CHAPITRE VII.

Continuation du même sujet : écoulemens par de petits orifices, lorsque les vases sont traversés de diaphragmes horizontaux.

(265.) PROBLÈME I. *LE vase* ABCD (Fig. 22), *supposé vertical & prismatique, pour la plus grande simplicité, étant percé à son fond* BC, *d'une petite ouverture* G, *& étant traversé par une cloison ou diaphragme horizontal* EF, *qui est percé de la petite ouverture* H : *on suppose que ce vase soit entretenu constamment plein d'eau au niveau* AD, *tandis que l'eau passe par les orifices* H *&* G ; *& on demande les circonstances de ces deux écoulemens ?* Fig. 22.

Il est d'abord évident que les deux compartimens *AEFD*, *EBCF*, ne communiquant ensemble que par la petite ouverture *H*, si l'eau pouvoit sortir avec plus d'abondance par l'ouverture *G* qu'elle n'est fournie par l'ouverture *H*, le fluide se sépareroit à l'endroit *H*, & formeroit deux masses isolées. Mais, comme la pression de l'atmosphère agit de haut en bas sur la surface *AD*, & de bas en haut sur l'ouverture *G*, ces deux forces contraires que l'on peut représenter, quant à leurs quantités, par le poids de deux colonnes d'eau qui se feroient équilibre (21) si elles agissoient immédiatement l'une contre l'autre,

forceront de plus ici l'eau interposée à former un corps continu. L'adhérence réciproque des particules de l'eau tend au même but ; mais l'expérience apprend que cette adhérence est très-foible ; & d'ailleurs elle agit ici sur une très-petite étendue. La pression de l'atmosphère est donc la seule cause efficace qui empêche la séparation de l'eau dans le cas où elle devroit avoir lieu par la nature de l'écoulement dans le vide.

Supposons d'abord que les orifices H, G, & les hauteurs EA, BE, soient tels que l'on ait l'équation $H\sqrt{EA} = G\sqrt{BE}$; on voit (203) que les quantités d'eau dépensées par les orifices H & G, sous les pressions EA, BE, étant proportionnelles aux produits $H\sqrt{EA}$, $G\sqrt{BE}$, on voit, dis je, dans l'hypothèse de l'équation précédente, que le compartiment supérieur fournira autant d'eau qu'il s'en écoule du compartiment inférieur ; & que par conséquent les écoulemens se feront exactement de la même manière que si ces deux compartimens étoient des vases isolés, entretenus constamment pleins aux hauteurs EA, BE. Les eaux de l'un n'ont par elles-mêmes aucune action en H sur les eaux de l'autre, abstraction faite de tout ébranlement produit par le choc que je mets toujours à l'écart, ici & dans la suite, comme très-petit ou insensible.

Lorsque l'équation proposée n'a pas lieu, c'est-à-dire lorsqu'on a $H\sqrt{EA} < G\sqrt{BE}$, ou $H\sqrt{EA} > G\sqrt{BE}$: alors, dans le premier cas,

ſi la réſiſtance de l'air ambiant n'y mettoit obſtacle, les eaux ſe ſépareroient en *H*; la ſurface de l'eau, dans le compartiment inférieur, s'abaiſſeroit quelque part, en *M N*, & l'écoulement par *G*, ſe feroit avec une vîteſſe dûe à la hauteur *B M*, telle qu'on auroit $G\sqrt{BM} = H\sqrt{EA}$. Au contraire, dans le ſecond cas, l'écoulement par *G* ſe feroit avec une vîteſſe dûe à une hauteur *B I* plus grande que *B E*, & telle qu'on auroit $G\sqrt{BI} = H\sqrt{IA}$. Mais, à cauſe de la preſſion de l'atmoſphère, les eaux des deux compartimens demeureront contiguës en *H*, dans le premier cas comme dans le ſecond; & on pourra déterminer ainſi les écoulemens dans l'un & l'autre cas.

Nommons h, la hauteur connue *A B*; x, la hauteur dûe à la vîteſſe en *G*; y, la hauteur dûe à la vîteſſe en *H*; Q, chacune des quantités d'eau qui paſſent dans le même temps t, par les orifices *G*, *H*, leſquelles doivent être égales entr'elles, puiſque les eaux des deux compartimens demeurent toujours contiguës en *H*; θ, le temps de la chute par a. On aura (201) les équations, $Q = \frac{2tG\sqrt{ax}}{\theta}$; $Q = \frac{2tH\sqrt{ay}}{\theta}$; & par conſéquent $G\sqrt{x} = H\sqrt{y}$.

Maintenant, je ſuppoſe ici, & dans le reſte de ce Chapitre, que la ſomme des hauteurs dûes aux vîteſſes par les orifices, ſoit égale à la hauteur entière *A B* du vaſe, en attendant que l'expérience

faſſe connoître la légitimité de cette hypothèſe, ou les reſtrictions qu'il faut y apporter. Nous aurons donc, $x + y = h$. Ainſi, $x = h \times \frac{H^2}{G^2 + H^2}$; $y = h \times \frac{G^2}{G^2 + H^2}$; $Q = \frac{2tG.H\sqrt{ah}}{\theta\sqrt{(G^2 + H^2)}}$.

On déduira facilement de ces formules pluſieurs Corollaires, ſelon les relations qu'on voudra ſuppoſer entre les quantités h, G, H, t, x, y, Q.

(266.) SCHOLIE. Le problème ſe réſout ſemblablement, lorſqu'un vaſe priſmatique $ABCD$
Fig. 23. (*Fig. 23*), entretenu conſtamment plein d'eau au niveau AD, eſt traverſé par un nombre quelconque de diaphragmes horizontaux EF, PQ; que le fond BC & ces diaphragmes ſont percés de petites ouvertures G, K, H. Et d'abord on voit que ſi on a $H\sqrt{EA} = K\sqrt{PE} = G\sqrt{BP}$, les écoulemens par H, K, G ſe feront comme ſi les compartimens étoient des vaſes iſolés, & entretenus conſtamment pleins aux hauteurs EA, PE, BP. Mais ſuppoſons en général que cette condition n'ait pas lieu : la preſſion de l'atmoſphère empêchera dans tous les cas la ſéparation des eaux d'un compartiment à l'autre; & ſi l'on nomme h, la hauteur entière BA; x, la hauteur dûe à la vîteſſe en G; y, la hauteur dûe à la vîteſſe en K; z, la hauteur dûe à la vîteſſe en H; Q, chacune des quantités égales d'eau qui paſſent dans le même temps t par les orifices G, K, H; θ, le temps de la chute par a:

on aura les équations, $Q = \frac{2tG\sqrt{ax}}{\theta}$; $Q = \frac{2tK\sqrt{ay}}{\theta}$; $Q = \frac{2tH\sqrt{az}}{\theta}$.

De plus, nous ſuppoſons que l'on ait $x + y + z = h$. Ainſi voilà autant d'équations du premier degré que d'inconnues x, y, z, Q; & par conſéquent on pourra déterminer facilement ces inconnues. Je laiſſe au Lecteur le ſoin d'achever ces calculs, & d'en tirer des Corollaires.

(267.) PROBLÈME II. *Le vaſe priſmatique* ACKB (Fig. 24) *qui communique avec le tuyau* KL, *fermé de tous côtés, excepté à l'endroit* D *où il y a un petit orifice, étant traverſé de pluſieurs diaphragmes horizontaux* EF, OP, VH, *dans leſquels on a percé les petits trous* G, M, N: *on demande le temps que la ſurface du fluide met à s'abaiſſer d'une certaine hauteur, le vaſe ſe vidant par l'orifice* D *ſans recevoir de nouvelle eau?* Fig. 24.

Les eaux des différens compartimens demeurent toujours contiguës les unes aux autres, en vertu de la preſſion de l'atmoſphère.

Cela poſé, 1.° ſoit TB la hauteur primitive du fluide dans le vaſe $ACKB$; & qu'au bout d'un certain temps t, la ſurface de cette eau parvienne en ab. On trouvera, par l'art. précédent, que pour les deux ſituations AB, ab, les hauteurs correſpondantes dûes aux vîteſſes en D, ſont:

$$TB \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2};$$

$$Tb \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2},$$

expreſſions dans leſquelles les hauteurs TB, Tb, ſont affectées d'un même facteur que je nomme n, pour abréger. De plus, je nomme h, la hauteur indéterminée Tb; A la ſection horizontale du vaſe.

Maintenant, ſuppoſons que dans un inſtant dt la ſurface ab s'abaiſſe en $a'b'$. La hauteur dûe à la vîteſſe en D étant $n.h$, on voit (201) que la quantité élémentaire d'eau qui ſortira pendant l'inſtant dt, aura pour valeur $\frac{2\,dt.D\sqrt{a}.\sqrt{(n.h)}}{\theta}$; ce qui donne, en égalant cette quantité à $A \times aa'$, $dt = \frac{\theta \times A \times aa'}{2\,D.\sqrt{a}.\sqrt{(n.h)}}$. Or, ſi l'on imagine pour un moment que tous les diaphragmes ſoient anéantis, & que le fluide ſortant librement par l'orifice D, ſous la hauteur h, la quantité élémentaire d'eau, $A \times aa'$, ſorte pendant l'inſtant dt': on aura, $dt' = \frac{\theta \times A \times aa'}{2\,D.\sqrt{a}.\sqrt{h}}$. Donc, $dt : dt' :: 1 : \sqrt{n}$; & le même rapport aura lieu entre les temps entiers t & t'. Ainſi, pour avoir le temps que la ſurface du fluide met à s'abaiſſer de AB en EF, dans l'hypothèſe du problème, il faut chercher le temps que la ſurface du fluide mettroit à s'abaiſſer de la même hauteur, dans l'hypothèſe où tous les diaphragmes ſeroient anéantis; puis diviſer ce dernier temps par $\sqrt{n}$.

2.° Quand la ſurface du fluide eſt parvenue

en $E\,F$, le mouvement eſt le même que ſi le diaphragme $E\,F$ n'exiſtoit pas ; ou , ce qui revient au même , comme ſi l'orifice G étoit infini par rapport aux autres M, N, D. Faiſant donc $G = \infty$, on trouvera que la ſurface de l'eau étant en $E\,F$, la hauteur dûe à la vîteſſe en D, eſt $TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$; & que la ſurface étant dans la poſition indéterminée ef, la hauteur dûe à la vîteſſe en D, eſt $Tf \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$. Le temps de l'écoulement qui répond au ſecond compartiment ſe détermine donc de la même manière que pour le premier.

3.° Pareillement, lorſque la ſurface de l'eau eſt en $O\,P$, il faut faire $M = \infty$; & le temps de l'écoulement ſe détermine de même pour le troiſième compartiment. Ainſi de ſuite pour tant de diaphragmes qu'on voudra. Enſuite ajoutant enſemble tous ces temps partiels, on connoîtra le temps total que la ſurface de l'eau met à s'abaiſſer d'une hauteur propoſée.

(268.) COROLLAIRE I. On voit par les expreſſions des hauteurs dûes aux différentes vîteſſes du fluide en D, qu'à meſure que la ſurface de l'eau s'abaiſſe de B en F, la vîteſſe en D diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue en F; qu'alors la vîteſſe augmente, puis diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue en P; qu'alors elle augmente, puis diminue juſqu'à ce que la ſurface ſoit parvenue

en H; qu'alors elle augmente, puis diminue à mesure que la surface continue de descendre; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de diaphragmes & d'orifices. En effet, un moment avant que la surface de l'eau arrive en EF, cette surface considérée comme étant encore dans le compartiment supérieur est élevée au-dessus du point D, d'une quantité très-peu différente de TF, & qu'on peut par conséquent prendre pour TF; la hauteur dûe à la vîtesse en D est donc alors

$$TF \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}.$$

Mais quand la surface de l'eau arrive juste en EF, & que par conséquent le compartiment supérieur doit être considéré comme n'existant plus, la hauteur dûe à la vîtesse en D, est $TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$.

Or, de ces deux expressions, la première est évidemment moindre que la seconde. Donc, la vîtesse en D, après avoir diminué successivement tant que la surface du fluide descend dans le compartiment AF, augmente à l'instant qu'elle passe dans le compartiment suivant EP. Il en est de même pour les compartimens EP, OH.

(269.) COROLLAIRE II. Les distances des diaphragmes peuvent être tellement réglées que le jet par l'orifice D, varie en raison donnée à mesure que le fluide passe d'un compartiment à l'autre. Car, supposons, par exemple, que toutes les ouvertures G, M, N, D soient égales : si nous

voulons que les vîtesses en D soient égales, lorsque la surface du fluide est successivement en B, F, P, H, nous égalerons entr'elles les hauteurs dûes à ces vîtesses, & par-là nous aurons $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2}$; donc $TH = HP = PF = FB$. D'où l'on voit que les hauteurs TB, TF, TP, TH étant en progression arithmétique décroissante dont la raison est TH, la vîtesse en D sera constamment dûe à la hauteur TH, quand la surface du fluide sera en B, F, P, H.

Cette théorie est conforme à une expérience de M. Mariotte. Voyez la *Fig. 83* de son *Traité du Mouvement des Eaux*, avec le Discours qui y est relatif. L'explication que l'Auteur donne de cette expérience, est erronée.

(270.) COROLLAIRE III. La même théorie est facilement applicable à l'hypothèse où le réservoir contiendroit des fluides différens. Car soit (*Fig. 25*), un vase pareil à celui de la *Fig. 24*; mais pour plus de simplicité, n'y mettons que deux diaphragmes EF, OP, avec les petites ouvertures M, N, D. Que les trois compartimens $AEFB$, $EOPF$, $OCKLP$ contiennent trois fluides de différentes espèces. Supposons qu'au premier instant où la surface du fluide supérieur est en AB, la vîtesse de ce fluide en M, soit dûe à la hauteur BS analogue à BF; la vîtesse du fluide $EOPF$ en N, soit dûe à la hauteur SV analogue à FP; la vîtesse du fluide $OCKLP$, en D, soit dûe à Fig. 25.

la hauteur TV analogue à TP. Ayant nommé x la hauteur BS; y, la hauteur SV; z, la hauteur VT; θ, le temps de la chute par a; Q, chacun des volumes égaux de liqueur qui passent par chacune des trois ouvertures M, N, D, dans un même temps t que je suppose infiniment petit, pour que la surface AB ne s'abaisse pas, du moins sensiblement : on aura d'abord (201), pour la dépense de l'ouverture M, $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$; pour la dépense de l'ouverture N, $Q = \frac{2tN\sqrt{ay}}{\theta}$; pour la dépense de l'ouverture D, $Q = \frac{2tD\sqrt{az}}{\theta}$: ces équations donnent $\frac{M^2 x}{N^2} = y$, $\frac{M^2 x}{D^2} = z$.

Cela posé, en faisant de plus la pesanteur spécifique du fluide $AEFB = \varpi$; celle du fluide $EOPF = \varpi'$; celle du fluide $OCKLP = p$; $BF = b$; $FP = c$; $PT = f$; & observant que si l'on réduit toutes les hauteurs BS & BF, SV & FP, VT & PT qui répondent seulement deux à deux à un même fluide, à des hauteurs analogues à BS & BF: on aura (34) l'équation
$$x + \frac{\varpi' y}{\varpi} + \frac{pz}{\varpi} = b + \frac{\varpi' c}{\varpi} + \frac{pf}{\varpi};$$
ou bien, $\varpi x + \varpi' y + pz = \varpi b + \varpi' c + pf$. Comparant cette équation avec les précédentes, on trouvera
$$x = \frac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$$

$$y = \frac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$$

$$z = \frac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}.$$

Les hauteurs dûes, pour le premier inſtant, aux vîteſſes en *M, N, D,* étant ainſi déterminées, ſuppoſons qu'après un certain temps la ſurface du fluide ſupérieur ſe ſoit abaiſſée en ab; & qu'en conſéquence la ſurface du ſecond ſoit deſcendue en ef, celle du troiſième en op. Il eſt clair qu'on aura toujours $bf = BF$, $fp = FP$, & que la ſeule hauteur Tp du dernier fluide eſt variable. Ainſi en nommant k la hauteur Tp, on trouvera, par la même méthode, que pour cette poſition quelconque des trois fluides,

la hauteur dûe à la vîteſſe en M $\Big\} = \dfrac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}$,

la hauteur dûe à la vîteſſe en N $\Big\} = \dfrac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}$,

la hauteur dûe à la vîteſſe en D $\Big\} = \dfrac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + pk)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}$.

(271.) COROLLAIRE IV. Pour faire une application très-ſimple de l'article précédent, ſuppoſons qu'il n'y ait que deux fluides, ou que le fluide ſupérieur *A E F B* ſoit anéanti avec le diaphragme *E F*; que *O C K L P* ſoit de l'eau, & *E O P F* de l'air. On aura d'abord $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{\varpi'}{p} = \frac{1}{850}$. De plus, les preſſions de l'air extérieur ſur N & ſur D ſe faiſant équilibre,

il faut ſuppoſer $c = 0$. Donc la hauteur dûe à la vîteſſe de l'air à ſon paſſage en N eſt exprimée par $k \times \frac{D^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$; & la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau au ſortir de l'orifice D eſt exprimée par $k \times \frac{N^2 \times 850}{D^2 + 850 N^2}$. Lorſque l'ouverture D eſt infiniment petite par rapport à l'ouverture N, la première hauteur devient nulle, & la ſeconde devient k, comme cela doit être. Si les deux ouvertures N, D ſont égales, les vîteſſes de l'air en N, & de l'eau en D ſont égales, & les hauteurs qui leur ſont dûes, ſont exprimées chacune par la même quantité $\frac{850}{851} k$.

On peut, à l'aide de cette théorie, prendre une idée claire & préciſe de la vîteſſe avec laquelle le vin ſort d'un tonneau par un trou fait à l'un de ſes fonds, quand l'ouverture pratiquée à la paroi ſupérieure, & deſtinée à introduire de l'air dans le tonneau, eſt fort petite.

Fig. 26. (272.) PROBLÈME III. *La liqueur du vaſe* A B C D (Fig. 26), *entretenu conſtamment plein à la hauteur* A B, *paſſant par l'ouverture* M *dans le vaſe latéral* C E G F *fermé de tous côtés, excepté en* N, P, *où il y a deux petites ouvertures par leſquelles la liqueur a la liberté de ſortir : on demande les hauteurs dûes aux vîteſſes en* M, N, P, *& les quantités des écoulemens !*

Suppoſons que la liqueur en paſſant du vaſe $ABCD$ dans le vaſe $ECFG$, éprouve en chaque

chaque point de l'orifice M une réaction exprimée par MH, de la part de l'eau contenue dans le réservoir $ECFG$, & des parois de ce même réservoir. Il est évident qu'ayant mené les horizontales NV, HK, les hauteurs dûes respectivement aux vîtesses en M, N, P sont exprimées par les verticales DH, HV, HC. Ainsi, en nommant t le temps de l'écoulement ; θ le temps de la chute par a; h, la hauteur DC; b, sa partie DV; x, la hauteur DH; Q, la quantité d'eau qui passe par M; q, celle qui sort par N; q', celle qui sort par P : on aura (201), $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$; $q = \frac{2tN\sqrt{[a(b-x)]}}{\theta}$; $q' = \frac{2tP\sqrt{[a(h-x)]}}{\theta}$. De plus, $q + q' = Q$. Ces équations donnent $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b-x]} + P\sqrt{[h-x]}$, qui se réduit à une équation du second degré, de laquelle on tirera x. Connoissant x, on connoîtra HV, HC, Q, q, q'.

(273.) COROLLAIRE. Les hauteurs HV, HC dûes aux vîtesses en N & P sont évidemment celles des colonnes qui presseroient perpendiculairement les parois du vase $ECFG$ aux mêmes endroits, si l'on imaginoit que tout d'un coup les orifices N & P fussent bouchés. Ainsi la pression que souffre une partie X prise en un endroit donné des parois du réservoir $ECFG$, quand la liqueur sort par les ouvertures N & P, est exprimée par $X \times HC$.

Par exemple, suppofons l'ouverture P infiniment petite, ou $P = 0$. L'équation générale $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b - x]} + P\sqrt{[h - x]}$ deviendra $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b - x]}$; d'où l'on tire $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$, & par conféquent $CH = h - x = \frac{M^2 h + N^2 (h - b)}{M^2 + N^2}$. Donc la preffion de $X = \frac{X[M^2 h + N^2 (h - b)]}{M^2 + N^2}$.

On détermineroit de la même manière la preffion contre tout autre point des parois du réfervoir $ECFG$, & même du réfervoir $ABCD$. Mais on ne doit pas oublier que cette détermination fuppofe que les ouvertures M, N, P font fort petites, & que les eaux font comme ftagnantes dans les deux réfervoirs. Elle ne pourroit par conféquent pas être employée fans erreur, fi les eaux avoient une vîteffe fenfible dans l'un ou l'autre réfervoir. On a indiqué (239) la méthode pour déterminer en général la preffion que l'eau mue dans un tuyau, exerce contre les parois de ce tuyau.



CHAPITRE VIII.

De l'écoulement de l'eau qui ſort par un petit orifice, d'un vaſe en mouvement.

(274.) Les Problêmes dont je vais donner ici la ſolution, peuvent avoir leur application dans la pratique. Si, par exemple, un ſeau, rempli d'abord d'eau, monte ou deſcend d'un mouvement qui ne ſoit pas uniforme, & qu'on veuille déterminer la hauteur dûe à la vîteſſe de l'écoulement, par un petit orifice pratiqué en un endroit donné du fond ou des parois, afin de parvenir à connoître la quantité d'eau qui ſortira en un temps donné par cet orifice : ſi de même on veut déterminer la poſition qu'une maſſe fluide doit prendre dans un vaſe qu'on fait mouvoir d'un mouvement accéléré ou retardé ſur un plan, & la preſſion qui réſulte contre un point quelconque du vaſe, &c : toutes ces queſtions demandent, pour être réſolues, de nouveaux principes qu'il eſt à-propos d'expoſer, non-ſeulement à raiſon de l'utilité du ſujet, mais encore pour exercer nos Lecteurs à l'uſage de la Dynamique & de l'Hydraulique. Je prends des cas ſimples pour plus de clarté.

(275.) Problème I. *Le vaſe* A B C D (Fig. 27), *rempli d'abord juſques en* A D, *étant ſoulevé verticalement par le poids* P, *au moyen de la petite corde inextenſible & non-peſante* H M N P, Fig. 27.

qui passe sur les deux poulies de renvoi M *&* N : *on demande la pression du fluide sur la partie infiniment petite* p q *du fond ou des parois, ou la hauteur dûe à la vîtesse de l'écoulement par cet endroit!*

Soit *G* le centre de gravité de la masse totale du vase & de l'eau qu'il contient pour un instant proposé; & nommons *M* cette masse. Supposons que si les deux corps, ou les deux masses *P* & *M*, avoient été abandonnés à l'action libre de la pesanteur, ils eussent parcourus, en un instant, les petits espaces égaux Pt, Gx; mais qu'à cause de l'action & de la réaction que ces deux corps exercent l'un sur l'autre, *P* parcoure Pk, & *M*, Gy. La quantité de mouvement perdu par le premier étant égale à la quantité de mouvement que gagne le second dans le même sens : si l'on nomme g la gravité, f, la force accélératrice simple Pk ou Gy; on aura l'équation, $P(g-f) = M(g+f)$: d'où l'on tire $f = \frac{g(P-M)}{P+M}$; & par conséquent $xy = xG + Gy = g + \frac{g(P-M)}{P+M}$ $= \frac{2gP}{P+M}$, expression de la force qui pousse de bas en haut chaque particule de la masse *M*; de sorte que si l'on imprimoit un mouvement égal & contraire au système de toutes ces particules, il demeureroit en équilibre. Or, dans ce dernier cas, en vertu de la force $\frac{2gP}{P+M}$, qui agit verticalement de haut en bas sur chaque molécule du

fluide, il doit résulter contre un point quelconque du fond ou dès parois, une pression qui est à la pression que le même point supporteroit si le fluide étoit soumis à la seule action de la pesanteur, comme $\frac{2gP}{P+M}$ est à g, ou comme $2P$ est à $P+M$. Ainsi, en nommant h la hauteur Rq de l'eau dans le vase $ABCD$ regardé comme immobile : la hauteur dûe à la vîtesse en pq, dans l'hypothèse du problème, sera $h \times \frac{2P}{P+M}$; & cette même quantité représente par conséquent la pression de l'eau sur chaque point de pq.

(276.) COROLLAIRE I. Donc, pour avoir la quantité élémentaire d'eau dQ, qui sort pendant l'instant dt, il ne faut que mettre dans l'article 201, $h \times \frac{2P}{P+M}$ pour h, dt pour t, dQ pour Q, en conservant les autres dénominations. Par-là, on aura, $dQ = \frac{2dt.K}{\theta} \sqrt{\frac{2ahP}{P+M}}$.

(277.) COROLLAIRE II. Le vase étant supposé se vider par l'orifice pq, sans recevoir de nouvelle eau, nous aurons (en nommant maintenant x, la hauteur variable Rq; X, la section horizontale AD du vase à la surface de l'eau, laquelle section est une fonction de x, donnée par la figure du vase), nous aurons, dis-je, $dQ = - Xdx$; $M = A + \int Xdx$, A étant une constante. Donc $- Xdx = \frac{2dt.K}{\theta}$

$\sqrt{\frac{2aPx}{P+A+\int Xdx}}$, ou $dt = \frac{-\theta Xdx\sqrt{(P+A+\int Xdx)}}{2K\sqrt{2aP}.\sqrt{x}}$, équation d'où l'on tirera la relation entre x & t.

(278.) COROLLAIRE III. Suppoſons que le vaſe ſoit un ſolide de révolution, dont Rq eſt l'axe; & qu'on demande la figure qu'il doit avoir, afin qu'en temps égaux la ſurface de l'eau s'abaiſſe de quantités égales : il faura faire $dt = -ndx$, n étant un coëfficient donné; enſuite on ſuppoſera l'ordonnée $RA = RD = y$, & par conſéquent $X = my^2$, m étant le rapport de la circonférence au diamètre; on fera diſparoître les radicaux, & on mettra l'expreſſion $\int Xdx$ ou $\int my^2dx$ toute ſeule dans un membre; on différentiera, ce qui produira une équation de cette forme, $y^7dx + Bydx + Cxdy = 0$, qui s'intègre ſans difficulté.

(279.) *REMARQUE.* On voit par l'équation $f = \frac{g(P-M)}{P+M}$, que ſi $P = M$, on aura $f = 0$, $\frac{2P}{P+M} = 1$. Alors le vaſe eſt en repos, au moins pour un inſtant; & la quantité élémentaire d'eau, qui ſort pendant cet inſtant, eſt $\frac{2dt.K\sqrt{ah}}{\theta}$.

Si $P = 0$, on aura $\frac{2P}{P+M} = 0$. La preſſion du fluide ſur pq s'évanouit, & il ne ſortira point d'eau par l'orifice pq. C'eſt ce qui eſt d'ailleurs

évident, car tous les points de la masse M descendront par la pesanteur naturelle, avec la même vîtesse.

Si le poids P est infini, il faut négliger M en comparaison de P; & alors $\frac{2P}{P+M} = 2$. Ainsi, $dQ = 2 dt K \sqrt{\frac{2ah}{\theta}}$.

Si les deux poids P & M étant des quantités finies, on avoit $M > P$, le poids M descendroit, le poids P monteroit; & pour déterminer l'écoulement, il ne faudroit que faire f négative. On trouve dans ce cas, comme dans le premier, que la hauteur dûe à la vîtesse en pq, est $h \times \frac{2P}{P+M}$.

(280.) PROBLÈME II. *Le vase* ABCD (Fig. 28) *qui contient de l'eau, étant entraîné le long du plan horizontal* FQ, *au moyen du poids* P *attaché à la corde inextensible & non pesante* HNP, *qui passe sur la poulie* N *de renvoi : on demande la position que doit avoir la surface du fluide, lorsqu'elle est parvenue à un état uniforme & permanent, & la pression que souffrira un point quelconque du fond ou des parois du vase?* Fig. 28.

Soit M la somme des masses du vase & de l'eau qu'il contient. Supposons qu'en un instant le corps P eût parcouru, par sa pesanteur naturelle, le petit espace Pt, mais qu'à cause du corps M qu'il entraîne, il ne parcoure que Pk, tandis que M parcourt horizontalement un espace qui est égal

à Pk. En nommant g la gravité naturelle ; f, la force accélératrice Pk ; nous aurons l'équation $P(g-f) = Mf$, ou $f = \frac{gP}{P+M}$. D'où l'on voit que chaque particule du fluide eſt pouſſée dans le ſens FQ, par une force $\frac{gP}{P+M}$, & que ſi par conſéquent on imprimoit une force égale & contraire au ſyſtème, il demeureroit en repos. Or, dans ce dernier cas, chaque particule fluide eſt ſoumiſe à l'action de deux forces, l'une verticale qui eſt la peſanteur g, l'autre horizontale qui eſt $\frac{gP}{P+M}$; & ces deux forces produiſent une réſultante exprimée par $g \times \frac{\sqrt{[P^2+(P+M)^2]}}{P+M}$. Ainſi, pour qu'il y ait équilibre dans le fluide, ou pour que le fluide prenne un état fixe & permanent, il faut que la ſurface de ce fluide coupe perpendiculairement la direction de la réſultante que nous venons de trouver ; & comme cette même force eſt toujours conſtante en quantité & en direction, on voit évidemment que la ſurface du fluide doit être un plan incliné OM, tel que menant l'horizontale OE, on ait $\frac{OE}{OM} = \frac{P+M}{\sqrt{[P^2+(P+M)^2]}}$.

Il eſt clair que les lignes OE, OM ſont données de grandeur. La poſition du point O ſe détermine par la conſidération de la figure du vaſe & de la quantité de fluide qui y eſt contenu. Car,

ſoit par exemple, $ABCD$ un vaſe rectangulaire: que ce vaſe étant en repos, & que par conſéquent la ſurface du fluide, devenue horizontale, occupe la poſition IL, à laquelle répond la hauteur donnée CI: on aura, $CI \times CB = \frac{(OC + BM) \times CB}{2}$; ou $2CI = 2OC - ME$; ou $OC = CI + \frac{ME}{2}$, équation dont tout le ſecond membre eſt connu, puiſque $ME = \sqrt{[(OM)^2 - (OE)^2]}$, quantité connue.

Cela poſé, ſi d'un point quelconque T des parois du vaſe, on tire la droite TZ perpendiculaire à la ſurface OM du fluide, on vera que la preſſion ſoufferte par l'aire infiniment petite Tt, dans l'hypothèſe de notre problème, eſt à la preſſion qu'elle ſouffriroit ſous la profondeur TZ, ſi le fluide étoit ſoumis à la ſeule action de la peſanteur dans un vaſe en repos, comme $\frac{g\sqrt{[P^2 + (P + M)^2]}}{P + M}$ eſt à g, ou comme $\sqrt{[P^2 + (P + M)^2]}$ eſt à $P + M$. Par conſéquent la première preſſion ſera repréſentée par $\frac{Tt \times TZ \times \sqrt{[P^2 + (P + M)^2]}}{P + M}$.

(281.) COROLLAIRE. Connoiſſant la preſſion ſur Tt, on connoîtra la vîteſſe avec laquelle l'eau ſortira à l'inſtant que l'on fera une petite ouverture en Tt.

Si à meſure que le vaſe marche horizontalement

il perd de l'eau ſans en recevoir de nouvelle, la force accélératrice qui anime à chaque inſtant les particules du fluide, varie continuellement tant en quantité qu'en direction. Alors la détermination de l'écoulement appartient à la claſſe des problèmes du Chapitre V, où il eſt queſtion du mouvement d'un fluide animé de forces quelconques.

(282.) *Remarque.* On doit obſerver que le vaſe ne perdant point d'eau, la ſurface du fluide demeure inclinée & conſerve toujours la même inclinaiſon, tant que le mouvement du corps P dure, & que ce mouvement eſt uniformément accéléré. Mais ſi le vaſe, après s'être mu pendant un certain temps, d'un mouvement uniformément accéléré, parvient au repos ou à un mouvement uniforme, la ſurface de l'eau perd la poſition inclinée, & finit par ſe mettre dans un plan horizontal. C'eſt ce qui eſt évident par notre ſolution ; car alors on peut ſuppoſer $P = 0$; la force f eſt nulle, & la ſurface de l'eau, qui doit être perpendiculaire à la direction de la force qui preſſe chaque particule ſituée dans cette même ſurface, eſt néceſſairement horizontale, puiſqu'il n'y a plus que la peſanteur naturelle qui agiſſe ſur les particules du fluide.

On réſoudroit le problème avec la même facilité, ſi le vaſe gliſſoit ſur un plan incliné. Mais en voilà aſſez ſur cette matière.

CHAPITRE IX.

Du mouvement oscillatoire de l'eau dans un siphon.

(283.) J'AI démontré dans mon Traité de *Méca-nique (II.e part. liv. II, chap. III)*, les principales propriétés du mouvement des pendules. On y a vu que si un corps ou pendule *P (Fig. 29)*, suspendu par le moyen du fil *OP*, décrit de petits arcs de cercle *Pp*, *Qq*, en oscillant autour du point fixe *O*, toutes ses oscillations sont *isochrones* ou de même durée, quoique les arcs parcourus *Pp*, *Qq*, soient inégaux : on y a vu aussi que les durées des petites oscillations de deux pendules de longueurs inégales, sont entr'elles comme les racines carrées de ces longueurs. Le mouvement de l'eau qui se balance dans un siphon, est du même genre. Fig. 29.

(284.) PROBLÈME I. *Déterminer le mouvement d'oscillation d'un fluide dans un siphon* KLNM (Fig. 30), *de grosseur uniforme intérieure, & composé de deux branches verticales & d'une branche horizontale !* Fig 30.

Supposons d'abord que le fluide, dans l'état de repos, occupe l'espace *ALND* : alors les deux surfaces *AB*, *CD* sont de niveau (21). Supposons ensuite que par une cause quelconque,

telle, par exemple, que l'action d'un piston, la liqueur soit forcée de descendre en GH dans la branche MN, & par conséquent de s'élever en EF dans la branche KL; que cela fait, on ôte subitement le piston, de manière que le fluide soit abandonné uniquement à l'action libre de sa pesanteur. Il est clair que l'eau descendra & montera alternativement, formant des oscillations semblables à celles d'un pendule qui va & vient.

Soit P (*Fig.* 29), un pendule dont la longueur OP est la moitié de la longueur xyz de la colonne fluide, & qui décrit jusqu'au point le plus bas I des arcs PI égaux aux espaces EA. La force qui fait osciller le fluide est l'excès du poids de l'eau contenue dans l'une des branches du siphon, sur le poids de l'eau contenue dans l'autre branche. Ainsi, quand l'eau monte en EF dans la branche KL, & que conséquemment elle descend en GH dans la branche MN, cette force est le poids de la colonne $ESTF$, ou le double du poids de la colonne $EABF$. Elle est donc au poids de toute l'eau comme $2\,AE$ est à xyz, ou comme AE est à OP. D'où il suit, 1.° que la longueur xyz étant une quantité constante, la force qui fait osciller l'eau est toujours proportionnelle à l'espace qu'elle lui fait parcourir; & que par conséquent les oscillations de l'eau sont isochrones entr'elles. 2.° Ces oscillations sont de même durée que celles du pendule P; car la force qui fait décrire au pendule P le petit arc

PI, eſt à la peſanreur du même pendule, comme *PI* eſt à *OP*, ou comme *AE* eſt à *OP*; l'eau & le pendule ſont donc animés par la même force, & doivent par conſéquent faire leurs oſcillations dans le même temps.

(285.) COROLLAIRE. Puiſque les oſcillations de l'eau ſuivent les mêmes loix que celles des pendules, ſi l'on augmente ou diminue la longueur de la colonne d'eau, le temps de ſes oſcillations augmentera ou diminuera, & ſuivra la raiſon ſou-doublée de cette longueur.

(286.) PROBLÈME II. *Déterminer en général les oſcillations de l'eau dans un ſiphon de figure quelconque!*

Soit *KLMN* (*Fig. 31*), un ſiphon de figure quelconque, contenant un fluide qui, ayant été élevé vers *K*, par une cauſe extérieure quelconque, eſt parvenu dans la poſition indéterminée *EFGH*, où il eſt ſoumis uniquement à l'action de ſa peſanteur. Ce fluide fera des oſcillations qu'il s'agit de déterminer. Il faut, pour cela, connoître la direction que les particules du fluide prennent dans leurs mouvemens. Or, en employant ici le principe du parallélíſme des tranches, on peut ſuppoſer, ou que ces tranches ſont horizontales, ou qu'elles ſont perpendiculaires à la courbe *KghM*, regardée comme l'axe du ſiphon. Le calcul, dans la première hypothèſe, ſe rapporte à l'article 230, puiſque l'on peut conſidérer, pour un inſtant, Fig. 31.

$EFGH$ comme un vaſe ou un tuyau, dont EF eſt la ſurface ſupérieure du fluide, GH l'inférieure. Je vais réſoudre la queſtion, dans la ſeconde hypothèſe qui a été adoptée par pluſieurs ſavans Géomètres.

I. Imaginons donc que le fluide $EFGH$ eſt partagé en une infinité de tranches $LOol$, égales entr'elles & perpendiculaires en chaque point de la courbe gfh. La peſanteur qui agit verticalement ſur chaque tranche, ſe décompoſera en deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, qu'il faut négliger, l'autre dirigée ſuivant la courbe, la ſeule à laquelle il faille avoir égard.

Soient
- la gravité .... $= g$,
- la ſurface EF.................. $= P$,
- la ſurface GH.................. $= Q$,
- la ſection LO.................. $= y$,
- l'arc gf de la courbe gfh......... $= x$,
- le ſinus total.................... $= 1$,
- l'angle mfn que fait la courbe en f avec la verticale.............. $= p$,
- la vîteſſe de la ſurface EF........ $= u$,
- la hauteur dûe à cette vîteſſe....... $= r$,
- la vîteſſe de la ſection LO........ $= v$.

Cela poſé, il eſt clair que la partie de la peſanteur qui agit ſuivant fn, étant exprimée par g coſ. p, ſi les tranches n'agiſſoient point les unes ſur les autres, la vîteſſe v, à la fin de l'inſtant dt, deviendroit $v + g$ coſ. $p \cdot dt$; mais, comme à cauſe du mouvement forcé des tranches elle devient $v + dv$, on voit que les différentes tranches animées de la vîteſſe g coſ. $p \cdot dt - dv$,

se feroient équilibre. On aura donc, $\int dx\,(g\,\text{cos}.\,p\,.\,dt - dv) = 0$; d'où l'on tire (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$, pour v sa valeur $\frac{Pu}{y}$), $\frac{gydx}{Pu}\int \text{cos}.\,p\,.\,dx - Pdu\int\frac{dx}{y} + Puydx\int\frac{dy}{y^3} = 0$.

Les intégrales indiquées doivent répondre à la courbe entière gfh. Soient donc alors $\int \text{cos}.\,p\,.\,dx = F$; $\int\frac{dx}{y} = N$; & considérons que $\int\frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2P^2} - \frac{1}{2Q^2}$: l'équation précédente deviendra,

$$(A)\quad F.Q^2ydx - P^2Q^2Ndr + rydx(Q^2 - P^2) = 0.$$

Telle est la formule qui donne le mouvement du fluide pour un instant quelconque.

II. Maintenant, supposons qu'au premier instant du mouvement, le fluide occupe l'espace $VZRN$; & nommons z l'espace Kg parcouru par la surface EF pendant le temps t. Il est clair que la nature de la courbe $KghM$ étant donnée, & les deux espaces $VZRN$, $EFGH$, occupés successivement par le fluide, étant égaux entre eux, les quantités F, N, P, Q, ydx, peuvent être exprimées en fonctions de z & de constantes. Donc la vîtesse u de la surface EF, ou la hauteur r dûe à cette vîtesse, sera aussi une fonction de z; & pareillement t sera une fonction de z, à cause de $dt = \frac{dz}{u}$.

Appliquons cette théorie générale à des exemples.

EXEMPLE I. *Le siphon est cylindrique, & la courbe* KghM *est une demi-circonférence de cercle, dont le diamètre* KM *est horizontal.*

On aura, en ce cas, $P = Q = y$, & chacune de ces quantités sera constante. Soit menée au diamètre KM l'ordonnée fq; & supposons le rayon $CK = 1$; la demi-circonférence $KghM = m$; l'arc donné gfh, auquel répond le fluide dans toutes les situations $= n$; $fq = s$; l'arc indéterminé $Kgf = \xi$. On aura, $\text{cos}. p = \frac{ds}{d\xi} = \frac{d(\text{sin}.\xi)}{d\xi} = \text{cos}. \xi$; $\int dx \, \text{cos}. p = \int dx \, \text{cos}. \xi = \int d\xi \, \text{cos}. \xi = \text{sin}. \xi + A$, intégrale qui doit commencer lorsque $\xi = z$, & finir lorque $\xi = z + n$. Ainsi, $F = \text{sin}. (z + n) - \text{sin}. z$. De plus $N = \frac{n}{P}$; $y dx = P dz$. Donc l'équation (A) deviendra ici, $dz \, [\text{sin}. (z + n) - \text{sin}. z] - n dr = 0$; d'où l'on tire (en supposant que le fluide parte du point K, & par conséquent $r = 0$, lorsque $z = 0$), $nr = \text{cos}. n - 1 + \text{cos}. z - \text{cos}. (z + n)$. Ce qui donne r ou la hauteur dûe à la vîtesse de la surface EF.

Si l'on fait $z = m - n$, ou si l'on suppose que la surface antérieure GH parvienne en M, on trouvera encore $r = 0$. D'où il suit qu'alors le fluide aura perdu toute sa vîtesse, & qu'il redescendra. Il continuera ainsi à faire des oscillations réciproques,

réciproques, suivant la demi-circonférence, depuis le point K jusqu'au point M.

On trouvera la durée de ces oscillations par le moyen de l'équation $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$
$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{[\operatorname{cos}. n - 1 + \operatorname{cos}. z - \operatorname{cos}.(z + n)]}}$,
équation qu'il faudra intégrer de manière que t s'évanouisse lorsque $z = 0$, & que t reçoive sa valeur complète, lorsque $z = m - n$.

EXEMPLE II. *Le siphon* (Fig. 32) *est composé de trois tuyaux rectilignes* KLO, OLNR, RNM, *qui ont des diamètres égaux, & dont l'intermédiaire est horizontal; les deux autres sont inclinés.* Fig. 32.

Soient élevées, par les points f & m, les verticales fi, ms; & nommons f, le cosinus de l'angle donné Kfi; m, le cosinus de l'angle donné Mms; P, la section constante & perpendiculaire de chaque tuyau; l, la longueur donnée $gfmh$ de l'espace occupé par le fluide; b, la longueur donnée Kf du premier tuyau incliné; c, la longueur donnée du tuyau horizontal; x, l'espace Kg, parcouru par la surface du fluide pendant le temps t.

Cela posé, comme la loi de continuité n'est pas observée d'un tuyau à l'autre, on appliquera à chacun d'eux les raisonnemens de la solution générale; & on trouvera que pour le tuyau $EFOL$, la quantité $\int dx \operatorname{cos}. p$ est $f(b - z)$; que pour

le tuyau $GHNR$, elle eſt $mh \times m = m(z + l - b - c)$; qu'enfin pour le tuyau horizontal, elle eſt zéro. Retranchant la ſeconde expreſſion de la première (parce que le ſigne de m eſt contraire à celui de f), le reſte $f(b - z) - m(z + l - b - c)$, ſera la valeur de F pour le ſiphon entier. De plus, la quantité $\int \frac{dx}{y}$ ou N, ſera ici $\frac{l}{P}$. Par conſéquent l'équation générale (A) deviendra (en obſervant que $y = P$, $dx = dz$, $Q = P$), $dz[f(b-z) - m(z + l - b - c)] - l\,dr = 0$; d'où l'on tire $r = \left(\frac{f+m}{2l}\right) \times \left[\frac{2(fb + mb + mc - ml)z}{f+m} - zz\right]$. Donc, à cauſe de $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, on aura
$$t = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{[g(f+m)]}} \times \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(fb+mb+mc-ml)z}{f+m} - zz\right)}},$$
intégrale qui dépend en général de la quadrature du cercle. Repréſentons, pour abréger, le coéfficient de z par $2A$. De plus, nommons B le quart de circonférence pour le rayon A; T, le temps employé à parcourir l'eſpace A. On aura $t = \frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{[g(f+m)]}} \times \int \frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az - zz)}}$; & $T = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{[g(f+m)]}} \times \frac{B}{A}$. Or $\frac{B}{A}$ eſt une quantité conſtante, quel que ſoit le rayon A. Donc T eſt une quantité conſtante, donc les oſcillations entières du fluide ſont

iſochrones entr'elles, quelles que ſoient leurs amplitudes.

Soient L la longueur d'un pendule qui décrit de petits arcs de cercle; C, la diſtance initiale de ce pendule à la verticale; D, le quart de circonférence pour le rayon L; z, l'eſpace que le pendule parcourt circulairement, pendant le temps t, avec la vîteſſe v; T', le temps qu'il emploie pour arriver à la verticale. On aura $v\,dv = \frac{g(C - z)\,dz}{L}$, & par conſéquent $vv = \frac{g(2Cz - zz)}{L}$. Donc $t = \int \frac{dz}{v} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz - zz)}}$, & $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \times \frac{D}{C}$. Égalant cette valeur de T' à celle de T, & conſidérant que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, on aura $L = \frac{l}{f + m}$, expreſſion de la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le même temps que le fluide. Ce réſultat s'accorde avec celui qui a été donné ſans démonſtration par M. Jean Bernoulli. (Voyez ſes *Œuvres, tome III, page 125*).

Lorſque les tuyaux $EFOL$, $HGRN$ ſont verticaux, on a $f = 1$, $m = 1$; & l'équation $L = \frac{l}{f + m}$ devient $L = \frac{1}{2}\,l$, c'eſt-à-dire, que la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le même temps que le fluide, eſt la moitié de la longueur de la colonne fluide; ce qui s'accorde avec l'article 284.

(287.) SCHOLIE I. On voit que la même théorie eſt également applicable au mouvement de l'eau dans un long tuyau, en ſuppoſant que les tranches du fluide, regardées comme perpendiculaires à l'axe du tuyau, conſervent leur parallélifme. Nous avons donné (230) la ſolution de ce problème, dans la ſuppoſition du parallélifme de tranches horizontales; nous avons de plus déterminé (239) la preſſion qui doit réſulter alors contre un endroit quelconque des parois du tuyau. Mais dans l'hypothèſe préſente, où nous regardons les tranches comme perpendiculaires à l'axe du tuyau, on obtiendra d'autres réſultats. La vîteſſe du fluide ſe trouve par l'équation générale de l'article précédent. Quant à la meſure de la preſſion, on voit que la force accélératrice en vertu de laquelle toutes les tranches ſe feroient équilibre, étant ici $g \text{ coſ. } p - \frac{dv}{dt}$, la preſſion à l'endroit f (*Fig. 31*), eſt $\int dx \left(g \text{ coſ. } p - \frac{dv}{dt}\right)$.

(288.) SCHOLIE II. Newton, dans ſes *Principes mathématiques (liv. II, prop. 46)*, compare, comme il ſuit, au mouvement oſcillatoire de l'eau dans un ſiphon, le mouvement d'ondulation d'une maſſe fluide indéfinie, qui a été dérangée de la ſituation d'équilibre par l'action du vent, ou de toute autre manière.

Fig. 33. Soit *ABCDEF (Fig. 33)* une eau agitée, dont la ſurface monte & deſcende par des ondes

ſucceſſives. Que *A, C, E* ſoient les éminences de ces ondes; *B, D, F* les cavités intermédiaires qui les ſéparent. Le mouvement ſucceſſif des ondes ſe faiſant de manière que les parties les plus hautes *A, C, E* deviennent enſuite les plus baſſes, & la force qui fait deſcendre les plus hautes & monter les plus baſſes, étant toujours le poids de l'eau élevée, il s'enſuit que les oſcillations des ondes ſont de même eſpèce que celles de l'eau dans un ſiphon de groſſeur uniforme. Si l'on prend donc un pendule dont la longueur ſoit la moitié des diſtances entre les lieux les plus hauts *A, C, E*, & les lieux les plus bas *B, D, F*, les parties les plus hautes *A, C, E*, deviendront les plus baſſes dans le temps d'une oſcillation de ce pendule; & dans le temps d'une autre oſcillation, elles deviendront les plus hautes. Le pendule fera donc deux oſcillations pendant chacune des *ondulations*, c'eſt-à-dire, pendant que chaque onde parcourra l'eſpace compris entre deux ſommités voiſines ou deux cavités voiſines; eſpace qui exprime la largeur d'une onde. Et comme un pendule dont la longueur feroit quadruple de celle du précédent, ne feroit qu'une oſcillation, pendant que celui-ci en fait deux, on doit conclure que les ondes font leurs oſcillations dans le même temps qu'un pendule qui auroit pour longueur la largeur des mêmes ondes. Les durées des ondulations étant comme les racines carrées de leurs longueurs, on déterminera les quantités de ces durées, par la conſidération qu'un pendule qui a 3 pieds

8 $\frac{1}{2}$ lignes de longueur, fait une oscillation en une seconde, à la latitude de Paris.

Il est inutile de remarquer que cette théorie des ondulations, n'est, comme Newton en avertit lui-même, qu'une approximation; car on y suppose que les parties de l'eau se meuvent en lignes droites, comme dans le siphon de l'article 284; au lieu que réellement leur mouvement est circulaire en partie.

Le mouvement des ondes ne peut être déterminé d'une manière exacte & satisfaisante, que par les loix générales du mouvement des fluides, telles que nous les avons indiquées (Chap. V). M. de la Place a traité le premier ce sujet, pour les ondulations rectilignes *(Acad. de Paris, année 1776, page 542)*; & M. de la Grange a traité la question en général *(Acad. de Berlin, année 1781, page 196)*.



CHAPITRE X.

Manière d'avoir égard au frottement de l'eau contre les bords d'un orifice, ou contre les parois d'un long tuyau.

(289.) DANS la théorie que j'ai donnée jusqu'ici de l'écoulement des fluides, je n'ai point fait entrer en considération le déchet que le frottement contre les bords de l'orifice ou contre les parois du vase, peut apporter au produit. Ici je me propose d'indiquer les moyens d'estimer ce déchet, au moins à peu-près. Je prends des cas simples, pour ne pas m'engager dans de longs calculs, inutiles à mon but.

(290.) PROBLÈME I. *Un vase étant entretenu constamment plein à la même hauteur, au-dessus d'un petit orifice horizontal & circulaire* ABDE (Fig. 34) : *on demande la quantité d'eau écoulée, pendant un temps donné, en ayant égard au frottement du fluide contre les bords de l'orifice !* Fig. 34.

Du centre *C*, soient décrites une infinité de circonférences concentriques *a b d e*, *m n o p*, &c. Les particules qui frottent contre le bord *A B D E* de l'orifice perdent, par cette cause, une partie de leur vîtesse. Et comme ces particules ont une adhérence avec les suivantes, qui forment la

circonférence *abde*; que pareillement celles-ci ont une adhérence avec les ſuivantes, qui forment la circonférence *mnop*; ainſi de ſuite : il eſt clair que de proche en proche le frottement contre le bord de l'orifice *ABDE*, doit ſe faire ſentir à toutes les particules qui ſortent en même temps, & diminuer conſéquemment le produit ou la quantité d'eau écoulée. Conſtruiſant donc ſur *AC*, comme axe, une courbe *NgqK*, dont les ordonnées *AN*, *ag*, *mq*, *CK* repréſentent les vîteſſes correſpondantes aux points *A*, *a*, *m*, *C*; l'aire de cette courbe ſera proportionnelle à la ſomme des vîteſſes ou à la quantité d'eau écoulée. De ſorte que ſi l'on nomme r le rayon *CA*; x, l'abſciſſe *Cm*; X, la hauteur dûe à la vîteſſe en m; m, le rapport de la circonférence au diamètre; t, le temps de l'écoulement; θ, le temps de la chute par a; Q, la quantité d'eau écoulée, on aura (201), $Q = \frac{4t\sqrt{a}}{\theta} \int mx\,dx\sqrt{X}$, intégrale qui doit s'évanouir, lorſque $x = 0$, & recevoir ſa valeur complète, lorſque $x = r$.

On voit par-là que connoiſſant la loi ſuivant laquelle les particules tiennent les unes aux autres, on connoîtra la fonction X, & que par conſéquent on pourra déterminer Q, ſoit algébriquement, ſoit par les quadratures des courbes.

(291.) COROLLAIRE. Suppoſons, par exemple, que *NgqK* ſoit une ligne droite; ce

qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité, l'orifice étant regardé comme très-petit. Nommons H, la hauteur dûe à la vîteſſe centrale CK; h, la hauteur dûe à vîteſſe latérale AN; & menons NR parallèle à AC. Les triangles ſemblables NRK, Nfq donneront $fq = \frac{Nf \times RK}{NR}$ $= \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r}$; & mq ou $\sqrt{X} = \sqrt{h}$ $+ \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r} = \frac{x\sqrt{h}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Donc $\int x\,dx\sqrt{X} = \int\left(\frac{x^2 dx\sqrt{h}+(rx\,dx-x^2 dx)\sqrt{H}}{r}\right)$ $= \frac{x^3(\sqrt{h}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$. Ainſi, en faiſant $x = r$, on aura, $Q = \frac{2tmr^2\sqrt{a}.(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$. Reſte à déterminer H & h. Or, il y a, pour cela, deux moyens.

I. On ſait que dans les jets d'eau qui s'élèvent verticalement, le haut de la colonne eſt une eſpèce de pyramide, dont le ſommet eſt formé par les molécules centrales qui ſe ſuccèdent. Si l'on prend pour H la hauteur du ſommet de cette pyramide au-deſſus de l'orifice, & qu'on détermine H & Q, par une expérience immédiate, on connoîtra h. Car la formule précédente donne,

$$h = \frac{(3\theta Q - 2tmr^2\sqrt{aH})^2}{16m^2t^2r^4a}.$$

II. Suppoſons que la hauteur de l'eau dans le réſervoir étant toujours la même, on ait un ſecond orifice circulaire & horizontal; & nommons

les quantités analogues à H, r, Q par les mêmes lettres accentuées. Les quantités m, θ, a, t demeurent les mêmes. Il paroît que la hauteur h doit être aussi la même dans le second orifice que dans le premier ; car sous même hauteur d'eau dans le réservoir, le frottement de chaque point fluide contre le bord de l'orifice doit être le même ; & par conséquent il doit rester la même vîtesse à chaque particule, déduction faite de la perte occasionnée par le frottement. On aura donc, comme pour Q, cette seconde équation

$$Q' = \frac{2tmr'^2(\sqrt{a}H' + 2\sqrt{a}h)}{3\theta}.$$

De plus, en considérant que la loi du frottement doit être la même dans les deux cas, & que par conséquent on peut regarder, par exemple, HA comme le rayon du second orifice, tandis que CA est le rayon du premier, on aura, $\sqrt{H} - \sqrt{h} : \sqrt{H'} - \sqrt{h} :: r : r'$, ou

$$r(\sqrt{H'} - \sqrt{h}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Maintenant, regardons H, H', h, comme les trois inconnues, & supposons que tout le reste soit donné, nous trouverons

$$H = \left[\frac{\theta[Q(3r - r')r'^2 - 2Q'r^3]}{2tm\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right]^2,$$

$$H' = \left[\frac{\theta[Q'r^2(r - 3r') + 2Qr^3]}{2tm\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right]^2,$$

$$h = \left[\frac{\theta(Q'r^3 - Qr'^3)}{2tm\sqrt{a}.(r - r')r^2r'^2}\right]^2.$$

(292.) PROBLÈME II. *Résoudre le même problème, en supposant que l'orifice, toujours fort petit & horizontal, au lieu d'être circulaire, soit un rectangle* ABCD (Fig. 35)! Fig. 35.

Ayant mené du centre O les droites OA, OB, OC, OD, & ayant abaissé OK perpendiculaire à AB, soient tirées les droites OP, Op infiniment voisines. Du point O, avec le rayon OP, soit décrit le petit arc PV. Qu'on décrive encore du même point, avec les deux rayons infiniment peu différens Om, On les deux petits arcs mq, nr. Cela posé, soient $OK = b$; $KB = c$; $KP = x$; $Om = y$; la hauteur dûe à la vîtesse en $O = H$; la hauteur dûe à la vîtesse en $K = h$; & désignons par t, θ, a, les mêmes choses que ci-dessus. Les triangles semblables OKP, PVp donneront, $PV = \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb + xx)}}$, & les arcs semblables PV, mq donneront, $mq = \frac{by\,dx}{bb + xx}$. Donc le petit espace $mqrn = \frac{by\,dy\,dx}{bb + xx}$. En admettant sur la loi du frottement la même hypothèse que dans l'article précédent, la quantité de liqueur qui sort par le petit orifice $mqrn$ sera exprimée par $\frac{2t\sqrt{a}}{\theta} \times \frac{by\,dy\,dx}{bb + xx} \times \left(\frac{[\sqrt{(bb + xx)} - y]\sqrt{H} + y\sqrt{h}}{\sqrt{(bb + xx)}}\right)$, dont l'intégrale est (en regardant y seule comme variable),

$$\frac{t\sqrt{a}.bdx}{\theta(bb+xx)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{[3yy\sqrt{(bb+xx)}].\sqrt{H}-2y^3(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{3}.$$

Faisant $y=\sqrt{(bb+xx)}$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice $POp = \frac{t\sqrt{a}.bdx(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3}$, dont l'intégrale est $\frac{t\sqrt{a}.bx(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$. Faisant $x=c$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice triangulaire $OKB = \frac{t\sqrt{a}.bc(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$. Donc, en nommant Q la quantité de liqueur qui sort par l'orifice entier $ABCD$, on aura

$$Q = \frac{8t\sqrt{a}.bc(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}.$$

Cette équation fournit les mêmes remarques que celle de l'aricle précédent.

(293.) SCHOLIE I. Les deux problèmes précédens suffisent pour faire connoître la manière d'estimer les effets du frottement dans les écoulemens, par toutes sortes d'orifices horizontaux. Mais, pour apprécier exactement cette théorie, il faut la soumettre à de nombreuses expériences, en faisant varier les hauteurs des réservoirs, les figures & les dimensions des orifices. Quand on aura ainsi déterminé les loix du frottement pour de petits orifices horizontaux, on pourra appliquer les mêmes principes à des orifices latéraux, petits, mais dont tous les points ne peuvent pas néanmoins être censés placés à la même distance de la surface du fluide. Car, en regardant, comme nous

l'avons déjà fait Chapitre III, un orifice latéral, comme partagé en une infinité de petits orifices par des plans horizontaux, on cherchera d'abord les écoulemens par ces orifices élémentaires; ensuite on trouvera, par la sommation, les écoulemens pour les orifices entiers.

(294.) Scholie II. Il est facile d'appliquer la même théorie au mouvement de l'eau dans un long tuyau. Car, soit par exemple *A B C D* (*Fig. 36*), un vase entretenu constamment plein à la hauteur *AB*, & auquel est implanté un tuyau horizontal *ECmn*, dont le diamètre est assez petit pour qu'on puisse regarder chaque section verticale du tuyau, comme ayant tous ses points à égales distances du plan horizontal qui rase la surface du fluide. Le filet central *o k* a une plus grande vîtesse que les autres; & en allant du centre à la circonférence, les vîtesses diminuent à cause du frottement contre les parois du tuyau. Or il est évident que l'on peut considérer le bout *m n* du tuyau comme un orifice simple, & que par conséquent on trouvera la quantité d'eau qui sort par cet orifice, au moyen de l'article 290, lorsque l'on connoîtra les hauteurs dûes aux vîtesses des points fluides *k*, *m*, & la loi suivant laquelle le frottement se fait sentir de la circonférence au centre, pour différentes hauteurs *A B* de réservoirs, & différentes longueurs *o k* de tuyaux. Fig. 36.

En admettant pour le frottement l'hypothèse de

l'article 291, nous avons, ici comme là, deux moyens pour déterminer les hauteurs *H* & *h* dûes aux vîtesses des points fluides *k*, *m*: l'un consiste à mesurer la hauteur *H* par l'amplitude du jet *ks*, & par la quantité *Q* d'eau écoulée par *mn* pendant un temps donné; d'où l'on conclura ensuite *h*; l'autre à déterminer *H* & *h*, pour deux tuyaux dont les diamètres sont différens, mais qui ont des longueurs égales, & qui sont placés sous les mêmes profondeurs *o D*. Bornons-nous à indiquer le premier moyen; car il est inutile de s'appesantir sur des détails qui n'ont aucune difficulté.

La nature de la courbe *ks* est telle, qu'un corps décriroit, par la seule pesanteur, la verticale *kr* dans un temps égal à celui pendant lequel il décriroit uniformément la droite *kh*, égale & parallèle à *rs*, avec une vîtesse égale à celle du point fluide *k*. Si donc l'on cherche, par la théorie du mouvement, les expressions de ces deux temps, & qu'on les égale entr'elles, on obtiendra l'équation $(rs)^2 = kr \times 4H$; *H* étant la hauteur dûe à la vîtesse du point *k*. Cette équation, qui est celle d'une parabole, donne $H = \frac{(rs)^2}{4kr}$. Ainsi, connoissant *rs* & *kr*, on connoîtra *H*. Quand on aura donc aussi déterminé *Q*, on connoîtra *h*.

On trouvera dans le second volume de cet Ouvrage, un très-grand nombre d'expériences sur le mouvement des eaux dans de longs tuyaux, rectilignes ou tortueux, horizontaux ou inclinés.

CHAPITRE XI.

Du mouvement des fluides élastiques, & en particulier du mouvement de l'air.

(295.) DE même qu'en traitant de l'équilibre des fluides élastiques, j'ai considéré spécialement celui de l'air; semblablement je vais ici considérer le mouvement de l'air, la théorie étant la même pour tous les fluides élastiques.

Quand on parle du mouvement de l'air, on peut avoir en vue, ou de connoître le transport, soit réel, soit virtuel d'une certaine masse d'air, d'un endroit en un autre; ou, le mouvement qu'ont les unes par rapport aux autres les particules d'une certaine masse d'air, qui a été dérangée de la situation d'équilibre. La première question va faire le sujet de ce Chapitre : la seconde sera traitée dans le Chapitre suivant. Je négligerai par-tout l'effet du frottement.

(296.) Soit *ABCD (Fig. 37)* un cylindre fermé de tous côtés, contenant un air homogène & également dense dans toute son étendue. Cet air est dans un état de compression, & aussi-tôt qu'on lui donne quelqu'issue, ou qu'on lui facilite le moyen de s'étendre ou de se dilater, il se dilate en effet, & sa force élastique diminue. Dans chaque Fig. 37.

état de compreſſion, la force élaſtique eſt toujours égale à la force qui a produit cette compreſſion. Ainſi, par exemple, ſi l'air *ABCD* eſt pareil à celui que nous reſpirons, & que par conſéquent il ait été comprimé, ou par la preſſion même de l'atmoſphère, ou par une force équivalente, il pourra faire équilibre par ſon reſſort, dans l'état moyen, ou au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur, laquelle hauteur eſt indiquée par le baromètre; ou au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, l'eau étant environ quatorze fois moins denſe que le mercure; ou, au poids d'une colonne d'air de 850 × 32 pieds, ou 27200 pieds, l'air naturel étant environ huit cents cinquante fois moins denſe que l'eau. Si donc on nomme en général F, la force élaſtique de l'air; aa, la ſurface de la baſe qui en ſupporte l'action; H, la hauteur de la colonne de mercure ou d'eau, ou d'air, qui eſt équivalente à la force F; on aura $F = aaH$. Pour l'air naturel, il faudra faire $H = 28$ pouces, ou $H = 32$ pieds, ou $H = 27200$ pieds, ſelon que l'on voudra évaluer la preſſion ou le reſſort de cet air, par le poids d'une colonne de mercure, ou d'eau, ou d'air.

(297.) L'expérience fait voir (66 & 67) que ſi une même maſſe d'air qui conſerve toujours le même degré de température, eſt réduite à occuper ſucceſſivement différens volumes, les forces qui la compriment, & par conſéquent auſſi ſes différentes forces élaſtiques, ſuivent la raiſon inverſe

inverſe des volumes ou la raiſon directe des denſités. Or réduire une maſſe d'air à occuper différens volumes, c'eſt la même choſe que faire entrer dans un même volume différentes quantités d'air, dont les denſités ſoient les mêmes reſpectivement que celles de la maſſe propoſée dans ſes différens états. Concluons donc de cette expérience que ſi différentes maſſes d'air occupent ſucceſſivement un même volume, elles ont des forces élaſtiques qui leur ſont proportionnelles ; ou, ce qui revient au même, qui ſont proportionnelles à leurs denſités, puiſque la denſité n'eſt autre choſe que la quantité de matière compriſe ſous un même volume donné.

(298.) PROBLÈME I. *Déterminer la vîteſſe avec laquelle l'air ſort à chaque inſtant du vaſe* ABCD (Fig. 37), *par le petit orifice* C, *en ſuppoſant qu'il s'échappe dans le vide, ou qu'il n'éprouve aucune réſiſtance à ſa ſortie !* Fig. 37.

Soient, pour le premier inſtant du mouvement, P le poids auquel la force élaſtique de l'air peut faire équilibre ; Q, la denſité de ce fluide ; V, ſa vîteſſe ; & nommons q, la denſité qu'il a au boût d'un certain temps t ; u, ſa vîteſſe à la fin de ce même temps. De plus, nommons M & m les maſſes d'air qui ſortent en temps égaux dans les deux cas. On voit, par l'article précédent, que la force élaſtique de l'air après le temps t, ſera $\frac{Pq}{Q}$: & comme les forces motrices ſont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles

produisent dans le même temps, on aura, $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Mais les masses M & m, sont comme les produits de leurs volumes par leurs densités, & leurs volumes sont comme les produits de l'orifice par les vîtesses. Ainsi l'orifice étant le même dans les deux cas, on aura, $M : m :: QV : qu$. Donc, $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$. D'on l'on tire $u = V$. Ainsi l'air sort continuellement avec la même vîtesse, qui est la vîtesse initiale V.

(299.) COROLLAIRE. Supposons qu'au premier instant l'air contenu dans le vase soit de l'air naturel. Alors le poids P est égal au poids d'une colonne d'air naturel qui auroit l'orifice C pour base, & 27200 pieds de hauteur (296). La colonne qui presse sur l'orifice, & la masse qui en sort à chaque instant, ayant ainsi la même densité, la vîtesse en C est dûe à la hauteur 27200 pieds. Or un corps grave, qui tombe de 15 pieds de hauteur, acquiert une vîtesse capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds en une seconde. Par conséquent, on aura la vîtesse V, pour une seconde, en faisant cette proportion, $\sqrt{15} : \sqrt{27200} :: 30$ pieds : $V = 1277$ pieds. L'air doit donc parcourir, en vertu de son ressort dans l'état ordinaire de l'atmosphère, environ 1277 pieds en une seconde, dans le vide.

(300.) PROBLÈME II. *Déterminer en général, dans l'hypothèse du problème précédent, le temps* t

que l'air emploie à passer de la densité Q *à la densité* q?

Soient H la hauteur dûe à la vîtesse constante V de l'air au passage C; θ, le temps de la chute par a; C, l'aire de l'orifice ; A, le volume du cylindre $ABCD$. Il sortira, pendant l'instant dt, un petit volume d'air exprimé par $\frac{2 C dt \sqrt{aH}}{\theta}$ (201). Or la masse étant comme le produit du volume par la densité, la petite masse d'air, comprise sous ce volume, sera $\frac{2 C q dt \sqrt{aH}}{\theta}$. Mais d'un autre côté, il est évident que durant le temps t, il est sorti du cylindre une masse exprimée par $A.Q - A.q$. On aura donc, $\frac{2 C q dt \sqrt{aH}}{\theta} = d(A.Q - A.q) = -A dq$; ce qui donne $dt = \frac{\theta A}{2 C \sqrt{aH}} \times - \frac{dq}{q}$, dont l'intégrale est (en faisant $t = 0$, lorsque $q = Q$), $t = \frac{\theta A}{2 C \sqrt{aH}} \times L.(\frac{Q}{q})$.

On voit, par cette expression du temps, que le vase ne se videroit entièrement qu'au bout d'un temps infini; mais il ne faut pas oublier ici que suivant la remarque de l'article 70, l'hypothèse sur laquelle cette formule est fondée, cesse d'être exacte, lorsque la densité q devient très-petite.

(301.) PROBLÈME III. *L'air ayant été condensé dans le vase* ABCD : *on demande la vîtesse avec laquelle il sortira par le petit orifice* C, *en supposant qu'il se répande dans un air environnant plus rare que lui, & d'une étendue infinie, telle qu'on peut toujours l'attribuer à l'atmosphère par rapport au vase* ABCD!

Nommons D, la densité de l'air extérieur; F, sa force élastique; Q, la densité initiale de l'air intérieur, ou de l'air contenu dans le vase, & par conséquent $\frac{QF}{D}$ sa force élastique initiale; q, la densité de l'air intérieur, après un certain temps t, & par conséquent $\frac{qF}{D}$ sa force élastique correspondante; M, la petite masse initiale d'air qui sort par l'orifice; V, sa vîtesse; m, la petite masse d'air, qui sort, après le temps t; u, sa vîtesse. L'air extérieur opposant constamment la résistance F à la sortie de l'air intérieur, il est évident que la force expulsive initiale de l'air intérieur est $\frac{QF}{D} - F$, ou $\frac{(Q-D)F}{D}$, & que la force expulsive, après le temps t, est $\frac{(q-D)F}{D}$. Or, les forces expulsives sont comme les quantités de mouvement qu'elles produisent dans le même temps; ainsi on a, $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: MV : mu$. Mais les masses M & m sont comme les produits de leurs densités par leurs volumes, & ces volumes

ſont comme les produits de l'orifice par les vîteſſes ; donc, $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: QV^2 : qu^2$; ce qui donne $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}}$.

On voit qu'on aura $u = 0$, ou que l'air ceſſera de couler, lorſqu'on aura $q = D$. Je n'ai pas beſoin de faire obſerver que ſi on avoit $D = Q$, il n'y auroit point du tout de mouvement, puiſqu'alors la force expulſive initiale $\frac{(Q-D)F}{D}$ étant nulle, la vîteſſe initiale V ſeroit auſſi nulle.

(302.) COROLLAIRE. Suppoſons, par exemple, $Q = 10D$, $q = 9D$; & que la preſſion de l'atmoſphère, ou la force élaſtique F, ſoit équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. La force expulſive initiale $\frac{(Q-D)F}{D}$ de l'air, équivaudra au poids d'une colonne d'eau de 9 × 32 pieds, ou de 288 pieds de hauteur : & comme l'air que cette force fait ſortir par l'orifice eſt 85 fois moins denſe que l'eau, il s'enſuit que l'écoulement initial eſt le même que ſi l'air étoit alors chaſſé par la preſſion d'une colonne d'air, par-tout de même denſité que lui, & de 85 fois 288 pieds, ou de 24480 pieds de hauteur ; & que par conſéquent la vîteſſe V eſt dûe à cette hauteur. Donc la vîteſſe V, pour une ſeconde, ſera de 30 pieds × $\frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}}$; & la vîteſſe u, auſſi pour une ſeconde, ſera de 30 pieds

$\times \frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}}$. Ainsi on aura à peu-près, $V = 1212$ pieds, $u = 1204$ pieds.

On peut se faire par-là une idée de la vîtesse avec laquelle l'air condensé frappe ou pousse une balle dans ces fusils qu'on appelle *arquebuses à vent*, & dont la description se trouve dans tous les Livres de Physique.

(303.) PROBLÈME IV. *Trouver le temps* t *que l'air emploie à passer de la densité* Q *à la densité* q, *dans l'hypothèse du problème précédent ?*

En représentant par H la hauteur dûe à la vîtesse initiale V, & en se rappelant que les hauteurs dûes aux vîtesses V & u, sont comme les carrés de ces vîtesses : on verra que la hauteur dûe à la vîtesse u, est $H \times \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}$. Ainsi, la petite masse d'air, qui sort pendant l'instant dt, est $\frac{2Cqdt}{\theta} \sqrt{\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}}$. Mais cette masse a pour autre expression $d(A \cdot Q - A \cdot q)$, ou $-Adq$. Par conséquent on a, $dt = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times \frac{-dq}{\sqrt{(qq-Dq)}}$, dont l'intégrale est (en faisant toujours $t = 0$, lorsque $q = Q$), $t = \frac{\theta A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times L.\left[\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - D.Q)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(q^2 - D.q)}}\right]$.

Nous avons vu que l'air cesse de couler, lorsque $q = D$. Faisant donc $q = D$, dans l'expression

précédente, on aura celle du temps que dure l'écoulement.

(304.) PROBLÈME V. *Le vase* ABCD *étant supposé contenir un air plus rare que celui de l'atmosphère : on demande la vîtesse avec laquelle ce dernier entrera dans le vase, par le petit orifice* C !

En nommant D, la densité constante de l'air extérieur ; F, sa force élastique ; Q, la densité initiale de l'air contenu dans le cylindre, & par conséquent $\frac{QF}{D}$ sa force élastique initiale ; q, la densité de cet air, après le temps t, & par conséquent $\frac{qF}{D}$ sa force élastique après ce même temps ; V, la vîtesse initiale avec laquelle l'air extérieur entre dans le cylindre ; u, sa vîtesse après le temps t : on voit que la force impulsive initiale de l'air dans le cylindre est $F - \frac{QF}{D}$, ou $\frac{(D-Q)F}{D}$, & qu'après le temps t la force impulsive est $\frac{(D-q)F}{D}$. On aura donc, $\frac{(D-Q)F}{D} : \frac{(D-q)F}{D} :: DV^2 : Du^2$; & par conséquent $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}$.

Si au premier instant, le cylindre étoit vide, on auroit $Q = 0$; & alors $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D}}$.

On voit, dans l'un & l'autre cas, que l'air cesse d'entrer dans le cylindre, lorsque $q = D$, ou

lorsque la densité de l'air est la même en-dedans qu'en-dehors.

(305.) PROBLÈME VI. *Trouver l'équation entre le temps* t *& la densité* q, *dans l'hypothèse du problème précédent!*

Soit H la hauteur dûe à la vîtesse V; & gardons les autres dénominations. La petite masse d'air qui entre dans le cylindre $ABCD$, pendant l'instant dt, est exprimée par $\frac{2C.D\,dt}{\theta}\sqrt{\frac{aH(D-q)}{D-Q}}$; & comme elle a pour seconde valeur, $d(A.q)$, ou Adq, on aura $dt = \frac{\theta A\sqrt{(D-Q)}}{2C.D\sqrt{aH}} \times \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}}$, dont l'intégrale est $t = \frac{\theta A\sqrt{(D-Q)}}{2C.D\sqrt{aH}} \times [\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}]$.

(306.) PROBLÈME VII. *Les deux cylindres* ABCD, FCHG (Fig. 38), *fermés de tous côtés, & contenant des airs différemment condensés: on demande la vîtesse avec laquelle l'air passera d'un cylindre dans l'autre, par le petit orifice* C!

Fig. 38.

Il est d'abord évident que l'air le plus dense coulera dans le plus rare. Supposons que cet écoulement se fasse du vase $ABCD$ dans le vase $FCHG$. Nommons D, la densité de l'air de l'atmosphère; F, sa force élastique; Q, la densité initiale de l'air $ABCD$, & par conséquent $\frac{QF}{D}$ sa force élastique initiale; q, sa densité après le temps t, & par

conséquent $\frac{qF}{D}$ sa force élastique après ce même temps ; R, la densité initiale de l'air $FCHG$, & par conséquent $\frac{RF}{D}$ sa force élastique initiale ; r, sa densité après le temps t, & par conséquent $\frac{rF}{D}$, sa force élastique après ce même temps ; V, la vîtesse initiale de l'air $ABCD$; u, sa vîtesse après le temps t. Il est clair que la force expulsive de l'air $ABCD$ est $\frac{QF}{D} - \frac{RF}{D}$, au premier instant ; & $\frac{qF}{D} - \frac{rF}{D}$, après le temps t. Ainsi on aura, $\frac{QF-RF}{D} : \frac{qF-rF}{D} :: QVV : quu$; ce qui donne $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-r)}{q(Q-R)}}$.

L'écoulement cessera, quand on aura $r = q$.

Comme la masse totale d'air contenue dans les deux cylindres demeure constamment la même ; si l'on nomme A, la capacité ou le volume du cylindre $ABCD$; B, celui du cylindre $FCHG$, on aura cette seconde équation, $A.Q + B.R = A.q + B.r$, parce que les masses sont comme les produits des volumes par les densités. Cette équation donne, $r = \frac{A(Q-q)+B.R}{B}$. Substituant cette valeur de r dans la valeur de u, on aura $u = V \times \sqrt{\frac{Q[B(q-R)-A(Q-q)]}{Bq(Q-R)}}$;

équation qui donne la vîteſſe u, correſpondante à chaque denſité q.

(307.) PROBLÈME VIII. *Trouver l'équation entre le temps* t *&* *la denſité* q, *dans l'hypothèſe du problème précédent!*

Suppoſons, pour abréger un peu le calcul, $A \cdot Q + B \cdot R = f$; $A \cdot Q + B \cdot Q = K$; $B \cdot Q - B \cdot R = m$: on trouvera, en raiſonnant toujours de même, $\frac{2Cqdt}{\theta} \sqrt{\frac{aH(Kq - fQ)}{mq}} = - Adq$; ou bien $dt = \frac{\theta A \sqrt{m}}{2C \sqrt{aHK}} \times \frac{-dq}{\sqrt{(q^2 - \frac{fQ}{K} \cdot q)}}$, dont l'intégrale eſt

$$t = \frac{\theta A \sqrt{m}}{2C\sqrt{aHK}} \times L. \left[\frac{Q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{(Q^2 - \frac{fQ}{K})}}{q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{(q^2 - \frac{fq}{K})}} \right].$$

(308.) SCHOLIE. Dans les problèmes précédens, j'ai ſuppoſé que l'air conſervoit toujours la même température, ou que la force élaſtique de ce fluide ne dépendoit uniquement que de ſa denſité. Mais il faut conſidérer qu'une chaleur plus ou moins grande, a une influence conſidérable ſur la force élaſtique de l'air. Lorſqu'une maſſe déterminée de ce fluide vient à acquérir, d'une manière quelconque, une augmentation de chaleur : ou, elle s'étend en un plus grand volume & repouſſe l'air environnant & moins chaud, ſi elle en a la liberté : ou, ſi elle eſt contenue de

tous côtés dans un certain espace sans pouvoir s'étendre, elle acquiert une plus grande force élastique, & exerce par conséquent un plus grand effort contre les parois du vase, ou contre les obstacles qui s'opposent à son expansion. Cette augmentation de force élastique, est d'ailleurs de la même nature que celle qui naîtroit d'une plus grande densité de l'air, sous même température. Les effets résultans dans les deux cas peuvent donc être assimilés. De même, on peut toujours comparer l'action d'un fluide élastique quelconque, quelle que soit la cause de son élasticité, à la force élastique d'un air condensé. Ainsi, par exemple, une balle chassée par la forcce élastique de l'air condensé dans une *arquebuse à vent*, & un boulet de canon chassé par l'action du fluide élastique qui provient de l'inflammation de la poudre, sont mis en mouvement par des causes semblables, car l'intensité de la seconde cause, qui est beaucoup plus grande que celle de la première, ne détruit pas cette parité. D'après cette remarque générale, nous ajoutons ici quelques problèmes, qui ont de fréquentes applications dans la Mécanique & dans la Physique.

(309.) PROBLÈME IX. *Un boulet* K (Fig. 39), *contenu dans un canon ou cylindre horizontal* A B C D, *dont il remplit exactement la cavité sans frottement, étant chassé de* A *vers* B *par l'action d'un air condensé, ou par celle du fluide élastique qui se déve-* Fig. 39.

loppe lors de l'inflammation de la poudre : on demande la vîtesse du boulet en un endroit quelconque P M *du canon ?*

Soit, au premier instant, $AEFD$ l'espace occupé par l'air condensé ; nommons Q la densité de cet air ; D, celle de l'air de l'atmosphère, & F sa force élastique. La force élastique de l'air $AEFD$ sera $\frac{QF}{D}$. Supposons l'aire du cercle représenté par EF ou $PM = aa$; $AE = b$; $AP = x$; la masse du boulet $= K$; sa vîtesse en $P = u$. Quand le boulet est parvenu de E en P, & que par conséquent l'air $AEFD$ s'est répandu dans l'espace $APMD$, la force élastique de cet air ainsi dilaté est $\frac{QF}{D} \times \frac{aab}{aax}$, c'est-à-dire, $\frac{bQF}{xD}$. Cette force peut être regardée comme la pression d'une colonne de mercure sur la surface ou section PM ; elle est détruite en partie par la pression contraire F de l'atmosphère sur la même surface ; de sorte que la force absolue qui pousse le boulet de A vers B, est simplement $\frac{bQF}{xD} - F$. Par conséquent nous aurons, par le principe ordinaire des forces accélératrices, $Kudu = (\frac{bQF}{xD} - F)\,dx$; d'où l'on tire (en complétant l'intégrale de manière que l'on ait $u = 0$, lorsque $x = b$), $uu = 2F \cdot [\frac{bQ}{D.K} L.(\frac{x}{b}) + \frac{b-x}{K}]$. Faisant

$x = AB = E$, il viendra, $2F.\left[\frac{bQ}{D.K}L\left(\frac{E}{b}\right)+\frac{b-E}{K}\right]$ pour l'expreſſion du carré de la vîteſſe V du boulet à la ſortie du canon.

(310.) COROLLAIRE I. On voit par cette formule, que ſi l'on connoiſſoit *à priori*, ou d'une manière quelconque, la quantité $\frac{Q}{D}$, c'eſt-à-dire, le rapport de la denſité de l'air primitivement condenſé $AEFD$ à la denſité de l'air naturel, ou, ce qui revient au même, le rapport de la force élaſtique initiale du fluide qui pouſſe le boulet à la force élaſtique de l'air naturel, on connoîtroit V. Réciproquement, par la connoiſſance de V, on peut trouver $\frac{Q}{D}$. Or, pour déterminer V, par la voie de l'expérience, au lieu de poſer le canon horizontalement, on le poſera dans une ſituation un peu inclinée (ce qui ne peut produire qu'un léger changement dans la formule); & on meſurera ſur le terrein l'amplitude du jet; d'où, en tenant compte de la réſiſtance de l'air, on déduira la vîteſſe V, ou la hauteur dûe à cette vîteſſe.

(311.) COROLLAIRE II. Parmi toutes les longueurs E qu'on peut donner au canon, il y en a une qui rendra la vîteſſe V un *maximum*. On la trouvera en égalant à zéro la différentielle de V^2, priſe en ne faiſant varier que E. Par ce calcul, on obtient, $E = b \times \frac{Q}{D}$.

Cette longueur eſt beaucoup plus grande que l'expérience ne la donne. Mais il faut obſerver que nos calculs ſont fondés ſur l'hypothèſe, que la force élaſtique du fluide qui pouſſe le boulet le long du canon, ſuit exactement la raiſon inverſe du volume que le fluide occupe ſucceſſivement; ce qui n'eſt vrai à l'égard de l'air, que pour des condenſations moyennes; & ce qui peut s'écarter encore plus de la vérité, pour le fluide élaſtique réſultant de l'inflammation de la poudre; car ce dernier fluide n'eſt pas homogène, il ne s'enflamme pas tout d'un coup, & il s'échappe, en partie ſenſible, par les vides compris entre le boulet & les parois du canon. D'ailleurs, à meſure que la longueur du canon eſt plus grande, le boulet y éprouve plus long-temps la réſiſtance du frottement. Toutes ces conſidérations reſtreignent la longueur des pièces d'artillerie. Mais ordinairement on pouſſe trop loin cette diminution. L'expérience apprend que les longues pièces, dont on fait uſage dans les ſiéges, lancent le boulet avec beaucoup plus de vîteſſe que les pièces courtes dont on eſt quelquefois forcé de ſe ſervir dans la guerre de campagne, pour la facilité du tranſport & de la manœuvre. *Voyez* ſur ce ſujet l'*Artillerie* de Robins, avec les notes de M. Euler.

Fig. 40. (312.) PROBLÈME X. *Soit un cylindre vertical* LBCR (Fig. 40), *fermé de tous côtés, vide dans ſa partie ſupérieure* LADR, *& contenant dans ſa partie inférieure une certaine quantité d'air, maintenue*

en cet état par un poids K, posé sur le couvercle AD, qui est mobile, sans frottement & sans laisser de vide vers ses bords, lequel poids est par conséquent égal à la force élastique de cet air : on suppose que par un moyen quelconque, on applique encore sur le couvercle ou sur la tête du poids K un autre poids G, & on demande la vîtesse descensionnelle de la masse K + G ?

Supposons que le couvercle, au bout d'un temps t, soit parvenu dans la position parallèle quelconque PM: & soient $AB = a$; $AP = x$; la vîtesse de la masse $K + G$ en $P = u$; la gravité $= g$. La force élastique de l'air $ABCD$ étant $g \cdot K$, celle de l'air $PBCM$ sera $gK \times \frac{a}{a-x}$ (67). Par conséquent la force absolue qui fait descendre le couvercle ou la masse $K + G$, est $g(K + G) - gK \times \frac{a}{a-x}$, & on a l'équation $(G + K) u\,du = [g(K + G) - \frac{gKa}{a-x}]\,dx$; d'où l'on tire (en complétant l'intégrale de manière qu'on ait $u = 0$, lorsque $x = 0$), $u^2 = 2g[x + \frac{Ka}{K+G} \cdot L \cdot (\frac{a-x}{a})]$.

Quant à la valeur du temps dont l'équation différentielle est $dt = \frac{dx}{u}$, on la trouvera, en substituant dans cette équation pour u sa valeur, puis intégrant.

(313.) COROLLAIRE. On voit par l'expression de u^2, que x augmentant depuis zéro,

le premier terme de cette expreſſion augmente, mais que le ſecond diminue. La valeur de u deviendra donc encore zéro, lorſqu'on aura $x + \frac{Ka}{K+G} L.(\frac{a-x}{a}) = 0$, ou $x(K+G) = Ka.L.(\frac{a}{a-x})$. D'où il ſuit qu'alors le couvercle parvenu, par exemple en ON, remontera à ſa première poſition pour deſcendre de nouveau; ainſi de ſuite.

Fig. 41. (314.) PROBLÈME XI. *Suppoſons maintenant que le cylindre vertical* LBCR (Fig. 41) *ſoit ouvert par en haut & communique par conſéquent avec l'atmoſphère; que la partie inférieure* ABCD *contienne de l'air naturel, dont la force élaſtique eſt égale à la preſſion de l'atmoſphère ſur le couvercle* AD; *qu'on applique ſur ce couvercle un poids* G *pour le faire deſcendre: on demande la vîteſſe de la maſſe* G, *quand le couvercle ſera parvenu dans la poſition quelconque* PM!

Soient $AB = a$; $AP = x$; la vîteſſe deſcenſionnelle de la maſſe $G = u$. Je repréſente par $g . K$ la preſſion de l'atmoſphère ſur le couvercle AD, ou la force élaſtique de l'air $ABCD$, g étant la gravité, K une maſſe convenable. Il eſt évident que lorſque le couvercle eſt en PM, la force élaſtique de l'air $PBCM$ eſt $gK \times \frac{a}{a-x}$. Ainſi la force abſolue qui pouſſe alors le couvercle eſt $g . K + g . G - gK \times \frac{a}{a-x}$. Cette

force

force cemmunique le mouvement à la simple masse G; & on a par conséquent l'équation,

$$G u\, d u = [g (K + G) - \frac{K a}{a - x}]\, d x;$$

donc, $u^2 = 2 g [(\frac{K+G}{G}) x + \frac{K a}{G} L . (\frac{a-x}{a})]$.

(315.) Corollaire I. De-là, en faisant un calcul pareil à celui de l'article précédent, on trouvera que le couvercle AD doit descendre, puis remonter, ainsi de suite alternativement.

(316.) Corollaire II. Le ressort de l'air diminuant par le froid & augmentant par le chaud, on voit que si l'on peut, par un mécanisme quelconque, refroidir l'air $ABCD$, puis l'échauffer, ainsi de suite alternativement : on voit, dis-je, que sans le secours du poids G, le couvercle AD descendra & montera alternativement. Il est donc possible de construire une machine dont le mouvement soit produit & entretenu par l'action d'un air, ou d'un fluide élastique, que l'on refroidit & que l'on échauffe alternativement. Tel est en effet le principe du mécanisme de la pompe à feu.

(317.) Problème XII. *Le cylindre vertical* LBCR (Fig. 42), *toujours ouvert par en-haut,* Fig. 42. *& contenant de l'air naturel dans la partie inférieure* ABCD, *on suppose que le couvercle* AD *soit soulevé verticalement au moyen du poids* G *attaché à la corde non pesante* GVSF; *& on demande la vîtesse de la masse* G, *quand le couvercle* AD *est parvenu dans la position quelconque* PM!

Soient $AB = a$; $AP = x$; la vîteſſe deſcenſionnelle de la maſſe $G = u$; & repréſentons, comme ci-deſſus, la preſſion de l'atmoſphère ſur AD, ou la force élaſtique de l'air $ABCD$, par $g.K$. Lorſque l'air occupe l'eſpace $PBCM$, ſa force élaſtique ſera $gK \times \frac{a}{a+x}$. Ajoutant cette dernière force avec le poids $g.G$, & retranchant de la ſomme la preſſion $g.K$ de l'atmoſphère ſur le couvercle AD, on aura $g.G + \frac{g.Ka}{a+x} - g.K$ pour la force abſolue qui fait deſcendre la maſſe G. Donc, $Gudu = g\left(G - K + \frac{Ka}{a+x}\right)dx$; ce qui donne

$$u^2 = 2g\left[\frac{Ka}{G}.L.\left(\frac{a+x}{a}\right) - (K-G)x\right].$$

(318.) COROLLAIRE I. En ſuppoſant $K > G$, on voit que x augmentant, le premier terme de la valeur de u^2 augmente, mais que le ſecond diminue. Le couvercle, après être monté quelque part en ON, deſcendra en AD, pour remonter de nouveau; ainſi de ſuite.

(319.) COROLLAIRE II. Si, au lieu d'employer le ſecours du poids G, pour faire d'abord monter le couvercle AD, on ſuppoſe que l'air $ABCD$ vienne à s'échauffer, puis à ſe refroidir; ainſi de ſuite alternativement : il eſt clair que le couvercle AD aura un mouvement alternatif d'aſcenſion & de deſcenſion. Ce cas eſt l'inverſe de l'article 316.

CHAPITRE XII.

Du mouvement vibratoire des parties de l'air.

(320.) LORSQU'ON passe de la considération du mouvement d'une masse d'air dont les tranches ou les parties regardées elles-mêmes comme de petites masses, sont supposées avoir la même vîtesse pour un même instant, à l'examen du mouvement que prennent les unes par rapport aux autres, les particules élémentaires d'une masse d'air, qui a été ébranlée en quelque endroit par une cause quelconque : le problème change totalement de nature ; & on n'a pu parvenir encore à le résoudre complètement que dans un petit nombre de cas particuliers, non par le défaut des principes de Mécanique & d'Hydrodynamique, mais à cause de l'imperfection de l'analyse.

M. de la Grange est le premier qui ait entrepris avec succès cette profonde recherche *(Acad. de Turin, Tomes I & II)*. M. Euler s'en est depuis fort occupé ; & il y a fait en divers temps plusieurs découvertes importantes *(Acad. de Turin, Tome II ; Acad. de Berlin, 1759 & 1765 ; Acad. de Péterſbourg, 1771)*.

(321.) On sait que le son, ou le bruit en général, est l'effet d'une agitation imprimée à l'air qui vient en conséquence frapper le tympan de

l'oreille. Une corde tendue que l'on pince ou que l'on met en vibration, ébranle l'air environnant, lui communique le mouvement dont elle eſt affectée, & produit, quand on veut, les ſons muſicaux. Il en eſt de même d'un tuyau de flûte ou d'orgue qu'on fait réſonner. Rien n'eſt donc plus intéreſſant que de connoître les loix du trémouſſement de l'air, puiſque ces loix ſont la baſe de l'Acouſtique.

(322.) Le reſſort de l'air eſt la principale cauſe qui entretient ou produit le mouvement vibratoire d'où réſulte le ſon. Le poids de ce fluide n'y a d'influence qu'autant qu'il en augmente ou diminue le reſſort d'une manière marquée. En effet, on obſerve qu'au bord de la mer & ſur les montagnes, le ſon excité par une même cauſe, a la même intenſité & la même vîteſſe, malgré la différence du poids de l'air. Mais le chaud ou le froid, en dilatant ou en contractant l'air, font varier les ſons en proportion, de la même manière qu'en tendant plus ou moins une corde vibrante, on lui fait rendre des ſons plus ou moins aigus.

(323.) Les ſons excités en plein air, & ceux qu'on tire d'un tuyau réſonnant, étant de la même nature, le mouvement de vibration de l'air qui produit les uns & les autres, doit ſuivre les mêmes loix, du moins quant aux effets principaux. Je vais donc conſidérer ſimplement le mouvement de l'air dans un tuyau; ce qui ſimplifie le problème & facilite les moyens d'établir les élémens & les calculs qui

doivent en fournir la ſolution. De plus, je ſuppoſerai que la chaleur eſt conſtante pour un même lieu, & que par conſéquent la force élaſtique de l'air n'éprouve à cet égard aucune variation. Mais il ne faut pas oublier que d'un lieu à l'autre la différence de température de l'air peut produire quelque différence dans les tons, comme les Organiſtes l'obſervent.

(324.) Si nous voulions nous contenter d'enviſager la queſtion ſous un point de vue un peu limité & un peu hypothétique, nous adopterions excluſivement les moyens très-ingénieux que M. Daniel Bernoulli propoſe *(Acad. de Paris, 1762)* pour expliquer la formation des ſons dans les tuyaux d'orgue. On verra en effet par l'idée générale que je vais donner de ſa doctrine ſur ce ſujet, qu'elle rend des raiſons phyſiques très-plauſibles, du mécaniſme par lequel le mouvement vibratoire de l'air eſt produit & propagé.

(325.) M. Bernoulli diſtingue trois ſortes de tuyaux réſonnans : les tuyaux fermés par un bout & ouverts par l'autre ; les tuyaux ouverts par les deux bouts, & les tuyaux fermés par les deux bouts ; en ſuppoſant que dans ce dernier cas on puiſſe, d'une manière quelconque, imprimer du mouvement à l'air, ce qui ſert à expliquer la génération des tons harmoniques qu'on fait rendre à un tuyau ſimplement fermé par une extrémité, comme on le verra bientôt. Examinons ſucceſſive-

ment le mouvement de l'air dans ces trois espèces de tuyaux.

(326.) Soit donc, en premier lieu, un tuyau
Fig. 43. cylindrique *A B* (*Fig. 43*) fermé par le bout *A*, ouvert par le bout *B*. Qu'on le fasse résonner d'une manière quelconque, le son est produit par le mouvement de vibration des couches d'air *a a* qui s'approchent & s'éloignent alternativement du bout *A*. Ces couches prennent successivement les positions *b b*, *c c*, faisant les excursions *b c*. Toutes ces excursions peuvent être regardées comme très-petites : elles se font suivant les mêmes loix que les oscillations très-petites d'un pendule simple. On voit que l'air est successivement condensé & raréfié. Sur quoi il faut observer que la condensation ou la raréfaction n'est pas la même sur toute la longueur du tuyau. Les plus grandes condensations sont vers *A*; les plus grandes raréfactions, vers *B*; & immédiatement au bout *B*, l'air du tuyau a la même densité que l'air extérieur. Mais ces inégalités dans les condensations ou dans les raréfactions, n'empêchent point que les excursions des couches ne soient isochrones entr'elles, de même que l'isochronisme des oscillations d'un pendule n'est point troublé par les inégalités des petits arcs qu'il peut décrire successivement.

(327.) En second lieu, soit un tuyau *A B*
Fig. 44. (*Fig. 44*), ouvert par les deux bouts. Imaginons, au milieu de ce tuyau, une séparation *C C*: alors

on aura deux tuyaux *A C, B C*, fermés chacun par un bout & ouverts par l'autre. Mais, pour qu'on puiſſe regarder réellement la ſéparation fictive *C C* comme une cloiſon fixe, il faut que les couches d'air *a a* également éloignées de *C C* faſſent de part & d'autre des vibrations *c a b*, parfaitement égales & oppoſées. Ces couches exerceront ainſi des actions égales & contraires contre la cloiſon *C C* qui demeurera immobile; & l'on pourra conſidérer les deux tuyaux fictifs *A C, B C* comme le tuyau ſimple de l'article précédent. Suivant cette explication, un tuyau cylindrique ouvert par les deux bouts, doit donner le même ton qu'un pareil tuyau fermé par un bout, & dont la longueur ne ſeroit que la moitié de celle du premier. Mais, comme dans les tuyaux ouverts le ſon eſt produit avec une entière facilité, & que les allées & venues des couches d'air ſont parfaitement harmoniques, le ſon qu'ils rendent eſt plus éclatant & plus agréable que celui du tuyau bouché par un bout.

(328.) Enfin, ſoit *A B* (*Fig. 45*) un tuyau fermé par les deux bouts; & que l'air y ait été mis en vibration. On pourra regarder ce tuyau comme compoſé de deux parties *A C, B C*, leſquelles formeront chacune un tuyau fermé en *A* ou *B*, & ouvert en *C*. Les vibrations de l'air dans ces deux tuyaux partiels, pourront donc ſe faire comme celles du tuyau de la *Figure 43*, ſans que les vibrations des deux côtés ſe nuiſent réciproquement, pourvu que l'on ſuppoſe que toutes les couches Fig. 45.

d'air dans le tuyau entier *A B* vont toujours du même côté. Par-là, l'état de condenſation dans la partie *A B*, répondra à l'état de raréfaction dans la partie *C B*; & réciproquement. La couche d'air en *C* conſervera conſtamment ſa denſité naturelle; & en prenant de part & d'autre des couches *a a* également éloignées du point *C*, ces couches feront leurs vibrations *b a c* toujours du même côté, avec une parfaite égalité dans leurs excurſions & avec une parfaite correſpondance. Si l'on fait une petite ouverture en *C*, on tirera facilement par cette ouverture un ſon du tuyau, & le ton ſera le même que celui qui répond à la *Figure 43*, en ſuppoſant la longueur *A B* (*Fig. 45*) double de la longueur *A B* (*Fig. 43*.)

(329.) De-là, M. Bernoulli explique comment on peut d'un ſeul & même tuyau bouché par un bout & ouvert par l'autre, tirer pluſieurs tons. Il partage le tuyau en parties égales, mais en nombre impair; & en commençant par le bout fermé, il prend ces parties deux à deux, de manière qu'il en reſte une vers le bout ouvert; il conſidère chaque paire de parties, comme un tuyau fermé par les deux bouts. Tous ces tuyaux ſeront parfaitement conſonnans, comme étant d'une longueur égale; & quant à la dernière partie qui n'a que la moitié de la longueur de chacun de ces tuyaux fictifs, elle ſera auſſi conſonnante, ſuivant la remarque qui termine l'*article 326*.

(330.) Telles sont les hypothèses générales, d'après lesquelles M. Bernoulli déduit & soumet au calcul toute la théorie des sons musicaux dans les tuyaux d'orgue. Il considère d'abord des tuyaux cylindriques; ensuite il applique les mêmes principes aux tuyaux *à cheminée*. Par-tout une Géométrie délicate, & une suite d'expériences très-ingénieuses qui en confirment les résultats. La matière de ces recherches étant analogue à celle du problème *des cordes vibrantes*, l'Auteur emploie dans les deux cas des méthodes semblables. Mais en admirant les ressources de son génie, on est obligé de reconnoître qu'ici, comme dans le problème *des cordes vibrantes*, sa solution n'a pas toute la généralité que comporte la nature de la question. Le mouvement de l'air peut en effet être soumis aux loix ordinaires de l'Hydrodynamique, comme je vais le montrer. J'emploîrai, pour cela, la méthode de M. Euler, qui me paroît d'une extrême simplicité.

(331.) PROBLÈME I. *L'équilibre de l'air dans le tuyau cylindrique* A B (Fig. 46) *horizontal & rectiligne, ayant été dérangé d'une manière quelconque: trouver en général une équation qui exprime le mouvement que ce fluide prendra en conséquence!* Fig. 46.

Il y a deux manières d'envisager ce problème: l'on peut demander le mouvement absolu de l'air pour un endroit quelconque, après un certain temps, sans relation au mouvement initial; ou bien, l'on

peut demander la relation du mouvement en un endroit quelconque, au bout d'un certain temps, au mouvement en un autre endroit regardé également comme variable de position, mais avec la condition que pour un temps déterminé on connoisse les circonstances du mouvement pour ce dernier endroit. Nous allons traiter la question sous le second point de vue, qui présente le plus de facilité & de simplicité pour le calcul.

Soient A un point fixe; S, un point quelconque où l'air a été agité au premier instant. Concevons qu'au bout d'un temps t, la portion ou couche d'air infiniment petite $SRR'S'$ ait été transportée en $srr's'$; de manière que le point S soit parvenu en s, & le point S' en s'. Il s'agit de comparer l'état de l'air en $srr's'$ à son état initial $SRR'S'$.

Supposons $AS = S$; $As = s$; la densité de l'air en $S = Q$; la pression qu'il éprouve en ce point $= P$; la densité de l'air en $s = q$; sa pression $= p$; la vîtesse en $S = V$; la vîtesse en $s = v$. En admettant ici l'hypothèse de l'article 68, c'est-à-dire que pour un degré constant de chaleur, comme nous le supposons, la force élastique de l'air, ou sa pression est proportionnelle à la densité: il s'ensuit que si l'on nomme D la densité de l'air naturel, Π sa force élastique ou sa pression, on aura $P = \frac{Q.\Pi}{D}$; $p = \frac{q.\Pi}{D}$, ou (en faisant $\frac{\Pi}{D} = k$); $P = kQ, p = kq$.

L'état initial de l'air $SRR'S'$ étant donné, les quantités Q & V peuvent toujours être exprimées par le moyen de la seule variable S, & de quantités constantes. Quant aux grandeurs s, q, v; comme elles dépendent non-seulement de S & V, mais encore du temps t, elles sont des fonctions de S & t; fonctions qui doivent être telles qu'en faisant $t = 0$, on ait $q = Q$, $p = P$, $v = V$.

Les points s & s' répondant au même temps t, on voit que la petite ligne ss' est la différentielle de s en ne faisant simplement varier que S. Ainsi, suivant l'usage ordinaire de noter les différences partielles, on aura $ss' = dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$. Soit aa la largeur constante ou section perpendiculaire du tuyau. Les petites masses d'air $SRR'S'$, $srr's'$, ont pour valeurs, $aaQdS$; $aaq.dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$: la masse étant en général comme le produit du volume par la densité. Or, ces deux petites masses doivent être égales entr'elles; ainsi on aura, $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$, première équation entre Q, q, S, s.

L'espace élémentaire, parcouru par le point s, pendant l'instant dt, a pour expression $v\,dt$. Or, ce petit espace étant la variation de s, produite seulement par celle de t, est $dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$. On aura donc $v\,dt = dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ou $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. De même pendant l'instant dt, la vîtesse v acquiert

l'incrément dt $(\frac{dv}{dt})$, ou dt $(\frac{dds}{dt^2})$. Donc, le point s reçoit, dans le sens As, une force accélératrice $= (\frac{dds}{dt^2})$: force qui est produite par l'excès de la pression en s, dans le sens As, sur la pression en s', dans le sens opposé. Ces deux pressions répondant au même temps t, & la première étant p, ou kq; la seconde sera kq plus la différentielle de cette quantité, prise en ne faisant varier que S, c'est-à-dire, $kq + kdS$ $(\frac{dq}{dS})$. Donc l'excès de la première sur la seconde sera $- kdS$ $(\frac{dq}{dS})$: pression élémentaire qui, étant appliquée à tous les points de la largeur sr, forme la force accélératrice absolue $- a^2 kdS (\frac{dq}{dS})$ qui pousse la petite masse d'air $srr's'$, dans le sens As. Divisant donc cette force par la masse mue, c'est-à-dire par $a^2 qdS$ $(\frac{ds}{dS})$, ou par $a^2 QdS$, on aura, $- \frac{k}{Q}$ $(\frac{dq}{dS})$ pour la force accélératrice simple qui pousse le point s dans le sens As, & qui doit être égale à $(\frac{dds}{dt^2})$. On aura donc cette seconde équation, $- \frac{k}{Q}(\frac{dq}{dS}) = (\frac{dds}{dt^2})$, ou k $(\frac{dq}{dS}) + Q$ $(\frac{dds}{dt^2}) = 0$, entre S, s, Q, q, t.

En combinant ensemble les deux équations

fondamentales, $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$; $k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$: on pourra éliminer q & $\left(\frac{dq}{dS}\right)$. Car, d'abord, on aura $q = \frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; & d'un autre côté, puisque Q est une fonction de S & de constantes, si l'on différencie l'équation $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$ en ne faisant varier que s, on aura $dQ = dS\left(\frac{dq}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) + q\,dS\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$; ce qui donne $\left(\frac{dq}{dS}\right) = \frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)} - \frac{q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$. Substituant dans cette équation pour q sa valeur trouvée ci-dessus; substituant ensuite la valeur qui résultera de-là pour $\left(\frac{dq}{dS}\right)$, dans l'équation $k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$; on trouvera, toutes réductions faites :

$$(A).\ \frac{k\,dQ}{Q\,dS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - k\left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0.$$

Équation qu'il faudroit intégrer, pour déterminer en général le mouvement de l'air dans notre tuyau; mais c'est à quoi on n'a pas encore pu parvenir. Bornons-nous donc au problème suivant qui suffit pour expliquer la formation & la propagation du son; ce qui est le principal objet de cette recherche.

(332.) PROBLÈME II. *Déterminer le mouvement de l'air dans le tuyau proposé, dans l'hypothèse où le mouvement est très-petit!*

Dans cette hypothèse, les lignes S, s diffèrent peu l'une de l'autre; de sorte que si l'on suppose $s = S + z$, la quantité z sera très-petite. Or, cette supposition donne, $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$; $\left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$. Par conséquent, l'équation (A) deviendra $\frac{k\,dQ}{Q\,dS}\left(1 + \frac{dz}{dS}\right) - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left[1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)\right]^2 \times \left(\frac{ddz}{dS^2}\right) = 0$; ou bien (à cause que $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ est négligeable en comparaison de 1), (B). $\frac{k\,dQ}{Q\,dS} - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$.

Pour parvenir à intégrer cette équation, je fais $z = x + r$, x étant une quantité variable indéterminée, r une fonction de S seulement; donc, $\left(\frac{dz}{dS}\right) = \left(\frac{dx}{dS}\right) + \left(\frac{dr}{dS}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dS^2}\right)$; $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Ainsi l'équation (B) se changera en celle-ci, $\frac{k\,dQ}{Q\,dS} - k\left(\frac{ddr}{dS^2}\right) - k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$; d'où l'on peut tirer ces deux équations particulières, $\frac{dQ}{Q\,dS} - \left(\frac{ddr}{dS^2}\right) = 0$; $-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$.

La première de ces équations donne, $\frac{dQ}{Q} = dS(\frac{ddr}{dS^2})$, dont l'intégrale eſt $r = \int dS.L.(\frac{Q}{C})$, C étant une conſtante ; & en effet, ſi l'on différencie cette dernière équation, on aura $dr = dS.L.(\frac{Q}{C})$; $\frac{dr}{dS} = L.(\frac{Q}{C})$; $dS(\frac{ddr}{dS^2}) = \frac{dQ}{Q}$. Reſte donc à intégrer la ſeconde équation, $-k(\frac{ddx}{dS^2}) + (\frac{ddx}{dt^2}) = 0$, qui eſt de la même eſpèce que celle du problème *des cordes vibrantes*, & qui s'intègre conſéquemment par les mêmes moyens. Entre ces moyens, en voici un fort analytique & fort direct, que l'on doit encore à M. Euler (*Calcul intégral, Tome III, page 234*).

Soient u & y deux nouvelles variables, telles que l'on ait $u = \alpha S + \beta t$, $y = \gamma S + \delta t$; α, β, γ, δ étant des coéfficiens conſtans indéterminés. On aura, $du = \alpha dS + \beta dt$; $(\frac{du}{dS}) = \alpha$; $(\frac{du}{dt}) = \beta$; $dy = \gamma dS + \delta dt$; $(\frac{dy}{dS}) = \gamma$; $(\frac{dy}{dt}) = \delta$. Suppoſons qu'on ait les équations $dx = m\,dS + n\,dt$, (m & n fonct. de S & t). $dx = m'du + n'dy$, (m' & n' fonct. de u & y); qui donnent $m = (\frac{dx}{dS})$, $n = (\frac{dx}{dt})$, $m' = (\frac{dx}{du})$, $n' = (\frac{dx}{dy})$. Mettons dans la ſeconde, pour du & dy leurs valeurs : nous aurons $dx = m'\alpha dS + m'\beta dt + n'\gamma dS$

$+ n'\delta\, dt$; donc, $\left(\frac{dx}{dS}\right)$ ou $m = m'\alpha + n'\gamma$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ou $n = m'\beta + n'\delta$. Ainsi, $dm = \alpha\, dm' + \gamma\, dn'$; $dn = \beta\, dm' + \delta\, dn'$. Or, puisque m' & n' sont des fonctions de u & y, on a, $dm' = \varphi\, du + \varphi'\, dy$, $dn' = \xi\, du + \xi'\, dy$; équations dans lesquelles, $\varphi = \left(\frac{dm'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{du^2}\right)$, $\varphi' = \left(\frac{dm'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{du\,dy}\right)$, $\xi = \left(\frac{dn'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{dy\,du}\right)$, $\xi' = \left(\frac{dn'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$. Mettons dans ces mêmes équations, pour du & dy leurs valeurs; nous aurons, $dm' = \varphi\alpha\, dS + \varphi\beta\, dt + \varphi'\gamma\, dS + \varphi'\delta\, dt$; $dn' = \xi\alpha\, dS + \xi\beta\, dt + \xi'\gamma\, dS + \xi'\delta\, dt$. Donc $dm = \varphi\alpha^2\, dS + \varphi\alpha\beta\, dt + \varphi'\alpha\gamma\, dS + \phi'\alpha\delta\, dt + \xi\alpha\gamma\, dS + \xi\gamma\beta\, dt + \xi'\gamma^2\, dS + \xi'\gamma\delta\, dt$; $dn = \varphi\alpha\beta\, dS + \varphi\beta^2\, dt + \varphi'\gamma\beta\, dS + \varphi'\beta\delta\, dt + \xi\alpha\delta\, dS + \xi\beta\delta\, dt + \xi'\gamma\delta\, dS + \xi'\delta^2\, dt$. Donc $\left(\frac{dm}{dS}\right) = \varphi\alpha^2 + \varphi'\alpha\gamma + \xi\alpha\gamma + \xi'\gamma^2$; $\left(\frac{dn}{dt}\right) = \phi\beta^2 + \varphi'\beta\delta + \xi\beta\delta + \xi'\delta^2$. Ces deux dernières équations sont les mêmes que les suivantes :

$$\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{du\,dy}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right),$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddx}{du\,dy}\right) + \delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right).$$

Par conséquent, au lieu de l'équation proposée

— k

$-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right)+\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=0$, nous aurons celle-ci:

$$\left.\begin{matrix}-k\alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right)-2k\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{dudy}\right)-k\gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)\\ +\beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right)+2\beta\delta\left(\frac{ddx}{dudy}\right)+\delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right)\end{matrix}\right\}=0.$$

Maintenant, ſuppoſons (à cauſe des quantités indéterminées, α, β, γ, δ), $\beta^2-k\alpha^2=0$, $\delta^2-k\gamma^2=0$; & $\alpha=1$, $\gamma=1$, $\beta=\sqrt{k}$, $\delta=-\sqrt{k}$: les deux termes extrêmes de l'équation précédente diſparoîtront, & nous aurons ſimplement, $-(2k+2k)\left(\frac{ddx}{dudy}\right)=0$, ou $\left(\frac{ddx}{dudy}\right)=0$.

Pour intégrer cette équation, ſuppoſons $dx=Mdu+Ndy$, en ſorte que $M=\left(\frac{dx}{du}\right)$, $N=\left(\frac{dx}{dy}\right)$. On aura $\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{ddx}{dudy}\right)$, $\left(\frac{dN}{du}\right)=\left(\frac{ddx}{dydu}\right)$. Or, chacune des quantités $\left(\frac{ddx}{dudy}\right)$, $\left(\frac{ddx}{dydu}\right)$, qui ſont égales entr'elles, eſt zéro par hypothèſe; donc la quantité M ne contient point de y, puiſqu'en la différenciant ſuivant y, le coéfficient de dy, ſeroit zéro; & ſemblablement la quantité N ne renferme point de u. Ainſi, M eſt une fonction de u, & N une fonction de y. Donc (en déſignant les fonctions par les lettres F & f, ſuivies de deux points), on aura $x=F:u+f:y$; ou bien (à cauſe de $u=\alpha S+\beta t$

$= S + t\sqrt{k}, y = \gamma S + \delta t = S - t\sqrt{k}),$

$$x = F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

Subſtituons cette valeur de x dans l'équation $z = r + x$; mettons auſſi pour r ſa valeur $\int dS . L . (\frac{Q}{C})$: nous aurons,

$$z = \int dS . L . (\frac{Q}{C}) + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

Donc, à cauſe de $s = S + z$, on aura,

$$s = S + \int dS . L . (\frac{Q}{C}) + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

De plus, puiſqu'on a, $(\frac{ds}{dS}) = 1 + (\frac{dz}{dS})$, $(\frac{ds}{dt}) = (\frac{dz}{dt})$, on aura,

$$(\frac{ds}{dS}) = 1 + L . (\frac{Q}{C}) + F' : (S + t\sqrt{k}) + f' : (S - t\sqrt{k}),$$

$$(\frac{ds}{dt}) = \sqrt{k} . F' : (S + t\sqrt{k}) - \sqrt{k} . f' : (S - t\sqrt{k}).$$

La conſtante C peut être ſuppoſée égale à la denſité D de l'air naturel. D'un autre côté, puiſque l'agitation initiale de l'air a été très-petite, la denſité Q diffère peu de la denſité D; de ſorte que ſi l'on fait $Q = D + \theta$, θ ſera une quantité très-petite; & l'équation logarithmique $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D + \theta} = \frac{d\theta}{D} - \frac{\theta d\theta}{D^2} + \frac{\theta^2 d\theta}{D^3} -$ &c.

pourra se réduire à $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D}$, en rejetant le quarré & les puissances plus hautes de θ. Donc $L.\left(\frac{Q}{D}\right) = \frac{Q-D}{D}$, en complétant l'intégrale, de manière que $Q = D$ donne $\theta = 0$. Ainsi, $\int dS . L . \left(\frac{Q}{C}\right) = \int \frac{QdS}{D} - S$. On pourra donc changer les expressions de s & de $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ en celles-ci :

$$s = \int \frac{QdS}{D} + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}),$$

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{D} + F' : (S + t\sqrt{k}) + f' : (S - t\sqrt{k}).$$

Les valeurs de s, $\left(\frac{ds}{dS}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, s'appliqueront à l'état initial de l'air, en faisant dans ces valeurs, $t = o$; $s = S$; $q = Q$, & par conséquent $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, à cause de l'équation $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$; $\left(\frac{ds}{dt}\right) = V$. Par-là, on aura,

$$S = \int \frac{QdS}{D} + F : S + f : S;$$

$$1 = \frac{Q}{D} + F' : S + f' : S;$$

$$V = \sqrt{k} . F' : S - \sqrt{k} . f' : S.$$

Ces trois équations n'en forment réellement que deux, puisque la première, étant différenciée, donne la seconde. Des deux dernières combinées

ensemble, on tire les deux fonctions différentielles, $F' : S = \frac{D-Q}{2D} + \frac{V}{2\sqrt{k}}$; $f' : S = \frac{D-Q}{2D} - \frac{V}{2\sqrt{k}}$; & par conséquent aussi les deux fonctions intégrales, $F : S = \int dS(\frac{D-Q}{2D}) + \int \frac{VdS}{2\sqrt{k}}$; $f' : S = \int dS(\frac{D-Q}{2D}) - \int \frac{VdS}{2\sqrt{k}}$. Connoissant ainsi les fonctions $F : S$, $f : S$, qui répondent à l'état initial de l'air, on connoîtra aussi les fonctions $F : (S + t\sqrt{k})$, $f : (S - t\sqrt{k})$, qui répondent à l'état de l'air à la fin du temps t; puisque les unes & les autres se forment suivant la même loi. On pourra donc comparer ensemble les agitations de l'air dans ces deux états. De-là, nos Lecteurs, versés dans l'analyse, déduiront sans peine toute la théorie de la propagation du son dans des tuyaux cylindriques, soit que ces tuyaux aient une longueur finie & déterminée, soit qu'on les regarde comme indéfinis. Voyez de plus grands détails dans les Ouvrages que j'ai cités.



CHAPITRE XIII.

De la percussion ou résistance des Fluides.

(333.) LORSQU'UN fluide en mouvement rencontre un corps ou un obstacle placé sur sa route, il pousse nécessairement ce corps, cet obstacle, avec une certaine force, puisque les particules fluides sont elles-mêmes des petits corps, qui, multipliés par leur vîtesse, composent une quantité déterminée de mouvement. Si au lieu de supposer le fluide en mouvement, on le suppose en repos, mais qu'un corps vienne le choquer avec une certaine vîtesse, la *résistance* que le fluide opposera au corps proposé, sera égale à la *percussion* que le fluide mu avec la vîtesse du corps exerceroit contre ce même corps supposé en repos. En effet, pour changer la *résistance* en *percussion*, on n'a qu'à supposer le corps en repos, & attribuer sa vîtesse en sens contraire, au fluide. La *percussion* & la *résistance* des fluides suivent donc les mêmes loix, & se mesurent de la même manière.

(334.) ON distingue en général deux sortes de forces, les forces *mortes* & les forces *vives*. Les premières sont de simples *pressions* qui ne produisent pas de vîtesse actuelle & finie, & qui n'en produiroient qu'après avoir agi pendant un temps fini: les autres, qu'on appelle ordinairement *forces de percussion*, produisent une vîtesse finie & actuelle,

& peuvent être regardées comme des sommes de pressions accumulées. Il est évident que toute force de pression peut être contre-balancée ou mesurée par un poids ; car un poids n'est autre chose qu'une masse soumise à l'action de la pesanteur qui est elle-même une force de pression. Quant aux forces de percussion, si l'on suppose qu'elles produisent leur effet dans un instant indivisible, elles seront infinies par rapport aux forces de pression, & ne pourront par conséquent être mesurées par aucun poids. Mais on ne conçoit pas comment la force d'un corps en mouvement, qui est une quantité finie, peut, dans un instant indivisible, produire un effet fini, c'est-à-dire, imprimer une quantité déterminée de mouvement à un autre corps. Toute communication de mouvement se fait dans un temps fini, quoiqu'il puisse être d'une brièveté qui nous échappe. Nous pouvons donc regarder en général les forces de percussion comme agissant par degrés, à la manière des forces de pression, & comme produisant leur effet dans un temps fini extrêmement court, ou comme infiniment petit. Alors elles seront mesurables par des poids ; car la pesanteur appliquée, pendant un temps fini, à un corps, produit une force vive, capable par conséquent de faire équilibre à une autre force vive. On voit par-là que lorsqu'un fluide frappe un corps, le choc qu'il exerce ainsi est toujours réductible à un certain poids.

(335.) Il est très-difficile de déterminer les

loix de la percussion des fluides, d'une manière exacte & applicable à la pratique. On n'a pas encore pu trouver à ce sujet une Théorie parfaitement satisfaisante. Dans celle qu'on suit ordinairement, & qui a l'avantage d'être fort simple, on suppose que le fluide est composé à chaque instant, dans la direction de son mouvement, d'une infinité de filets parallèles qui donnent chacun leur coup, sans se gêner les uns les autres; ce qui ne peut pas avoir lieu en rigueur, & ce qui mène en certains cas à des résultats trop éloignés de la vérité pour être admissibles. Cependant deux motifs m'engagent à exposer ici cette théorie, malgré ses imperfections; l'un est de faciliter à mes Lecteurs l'intelligence de plusieurs Ouvrages sur l'Architecture navale, auxquels elle sert de fondement; l'autre est qu'elle peut être employée, sans craindre beaucoup d'erreur, comme je m'en suis assuré par l'expérience, dans le calcul des machines mues à l'aide de roues, par des courans d'eau; & en général dans tous les cas où l'angle d'obliquité du choc n'est pas trop petit, je veux dire lorsqu'il ne descend guère au-dessous de 60 degrés.

(336.) THÉORÈME I. *Si un même fluide* MXZN (Fig. 47) *dont toutes les particules se meuvent avec la même vîtesse, frappe perpendiculairement les deux plans* AB, AR *en repos: les forces des chocs sont entr'elles comme ces plans.* Fig. 47.

Car toutes les molécules fluides étant supposées

ſe mouvoir ſuivant les directions IK, OQ, &c, perpendiculaires aux deux plans propoſés, l'impulſion contre le plan AB, eſt à l'impulſion contre le plan AR, comme le produit du nombre des molécules qui frappent AB, par leur vîteſſe, eſt au produit du nombre des molécules qui frappent AR, par leur vîteſſe. Or les maſſes qui frappent dans des temps égaux, les plans AB, AR, ſont des priſmes qui ont pour baſes ces plans, & pour hauteur commune la vîteſſe du fluide. Donc le rapport de l'impulſion contre le plan AB, à l'impulſion contre le plan AR, eſt évidemment le même que le rapport du plan AB au plan AR.

Fig. 47 & 48. (337.) THÉORÈME II. *Si deux fluides de même eſpèce* MXZN, EGHF (Fig. 47 & 48), *mus avec différentes vîteſſes, frappent perpendiculairement les deux plans* A B, C D, *en repos : les forces des chocs ſeront entr'elles comme les produits des plans par les quarrés des vîteſſes des fluides.*

Nommons	l'impulſion contre AB	F,
	l'impulſion contre CD	f,
	la maſſe fluide qui choque AB	M,
	la vîteſſe de ce fluide	V,
	la maſſe fluide qui choque CD	m,
	la vîteſſe de ce fluide	u.

On aura, $F : f :: MV : mu$. Or, puiſque les fluides ſont de même eſpèce, les maſſes M & m ſont entr'elles comme leurs volumes, & leurs volumes ſont entr'eux comme les produits des plans AB, CD, qui leur ſervent de baſe, multipliés par

les vîtesses des fluides, qui en représentent les hauteurs. Ainsi on aura, $M : m :: AB \times V : CD \times u$; & $MV : mu :: AB \times V^2 : CD \times u^2$. Donc aussi, $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$.

(338.) *REMARQUE.* Si les fluides n'étoient pas de la même espèce, la raison des densités devroit entrer dans la raison des masses qui frappent en même temps les plans *AB, CD*. Alors *les chocs seroient en raison composée des plans, des densités des fluides, & des quarrés des vîtesses des mêmes fluides.* Il ne faut pas perdre cette remarque de vue, lorsqu'il s'agit de comparer le choc d'un fluide à celui d'un autre fluide de densité différente. Par exemple, sous la même étendue de la surface choquée, & sous la même vîtesse des deux fluides, la percussion de l'eau est à celle de l'air, comme 850 est à 1, c'est-à-dire, dans le rapport des densités de ces deux fluides.

Dans la suite, je suppose toujours, pour abréger, que les fluides sont de la même espèce, ou qu'ils ont la même densité.

(339.) THÉORÈME III. *Si les deux fluides* MXZN, EGHF, *allant toujours choquer perpendiculairement les deux plans* AB, CD, *avec les vîtesses* V *&* u, *ces plans ont, parallèlement à eux-mêmes, au moment du choc, les vîtesses* v *&* u′ : *les forces des chocs seront entr'elles comme les produits des plans, par les quarrés des différences ou des sommes des vîtesses des fluides & des plans.*

Car ſoient IT la vîteſſe du premier fluide, & KT la vîteſſe du plan AB; LQ la vîteſſe du ſecond fluide, & PQ la vîteſſe du plan CD: il eſt évident que les chocs ſont les mêmes que ſi les plans étoient en repos, & que les fluides, au lieu de ſe mouvoir avec les vîteſſes IT, LP, ſe mouvoient ſimplement avec les vîteſſes IK, LP, puiſque les plans ſe ſouſtraient au choc avec les vîteſſes KT, PQ. Donc (en nommant F & f les impulſions des deux fluides), on aura, $F:f :: AB \times (V-v)^2 : CD \times (u-u')^2$.

On voit de même que ſi les plans, au lieu de fuir directement les fluides, venoient à leur rencontre, avec les vîteſſes v & u', on auroit $F:f :: AB \times (V+v)^2 : CD \times (u+u')^2$. Ainſi, en réuniſſant les deux cas, on aura, $F:f :: AB \times (V \mp v)^2 : CD \times (u \mp u')^2$.

(340.) COROLLAIRE. Si l'un des plans, par exemple, AB, eſt en repos: alors $v = 0$, & on a, $F:f :: AB \times V^2 : CD \times (u \mp u')^2$, proportion qui ſert à comparer la percuſſion perpendiculaire d'un fluide contre un plan en repos, à la percuſſion perpendiculaire contre un plan mobile.

(341.) THÉORÈME IV. *Si le fluide* MXZN (Fig. 47) *frappe perpendiculairement le plan* A B *en repos, & que le fluide* EGHF (Fig. 49) *frappe obliquement le plan* C D *auſſi en repos : l'impulſion contre le plan* A B, *ſera à l'impulſion qui réſulte perpendiculairement contre le plan* CD, *comme le produit*

Fig. 47 & 49.

au plan A B, *par le quarré de la vîtesse du fluide* M X Z N, *& par le quarré du sinus total, est au produit du plan* C D *par le quarré de la vîtesse du fluide* E G H F, *& par le quarré du sinus de l'angle* R C D *d'incidence du fluide* E G H F *sur le plan* C D.

Nommons	l'impulsion contre AB	F,
	l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre CD	f,
	la vitesse du fluide $MXZN$	V,
	la vîtesse du fluide $EGHF$	u,
	la masse qui choque AB	M,
	la masse qui choque CD	m,
	sa vitesse perpendiculaire à CD	u',
	le sinus total	R,
	le sinus de l'angle d'incidence RCD	p.

On aura d'abord, $F : f :: MV : mu'$. Or, en menant la droite DR perpendiculaire à la direction du fluide, & terminée par CR qui est dans cette direction, il est évident que le nombre de filets qui frappent DC est le même que le nombre de filets qui frappent DR. Ainsi les prismes fluides qui frappent en temps égaux les plans AB, CD, sont entr'eux comme leurs bases AB, DR, multipliées par les vîtesses des fluides, qui en sont les hauteurs. On a donc, $M : m :: AB \times V : DR \times u$; ou bien (en observant que $DR = CD \times \frac{p}{R}$), $M : m :: AB \times V : CD \times \frac{p}{R} \times u :: AB \times V \times R : CD \times u \times p$. De plus, si sur la direction d'un filet quelconque xn du fluide $EGHF$, on prend la

partie ny pour repréſenter la vîteſſe de ce fluide, & qu'on faſſe le parallélogramme rectangle $ntyr$ dont le côté nt eſt perpendiculaire, & le côté nr parallèle à DC: on voit que des deux vîteſſes nt, nr dans leſquelles la vîteſſe ny ſe décompoſe, il n'y a que la première qui contribue au choc perpendiculaire contre DC, & qu'il ne faut pas avoir égard à la ſeconde. Comparant la vîteſſe nt ou u' à la vîteſſe u du fluide $EGHF$, on aura, $u' : u :: ry : ny :: p : R$, & par conſéquent $u' = u \times \frac{p}{R}$. On aura donc, $MV : mu' :: AB \times V^2 \times R : \frac{CD \times u^2 \times p^2}{R} :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$. Donc enfin, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$.

Cette proportion ſervira à comparer la percuſſion oblique à la percuſſion perpendiculaire, les deux plans choqués étant en repos à l'inſtant des chocs.

(342.) COROLLAIRE I. Lorſque les vîteſſes V & u ſont égales, on a ſimplement, $F : f :: AB \times R^2 : CD \times p^2$, proportion qui ſervira à comparer l'impulſion perpendiculaire d'un fluide contre un plan, à l'impulſion du même fluide ou d'un fluide pareil, mu avec la même vîteſſe, contre un autre plan frappé obliquement.

(343.) COROLLAIRE II. De-là ſuit auſſi la manière de comparer entr'elles les percuſſions perpendiculaires qui proviennent des percuſſions obliques, les plans choqués étant toujours en

repos; car si, en gardant les autres dénominations de l'article 341, on appelle A la surface du plan AB, B celle du plan CD; qu'ensuite on suppose un troisième plan C qui soit choqué obliquement par un troisième fluide mu avec la vîtesse v, & qu'on appelle φ la force qui résulte perpendiculairement contre ce même plan, q le sinus de l'angle sous lequel il est frappé: on aura ces deux proportions,

$$F : f :: A \times V^2 \times R^2 : B \times u^2 \times p^2 ;$$
$$\varphi : F :: C \times v^2 \times q^2 : A \times V^2 \times R^2 ,$$

lesquelles étant multipliées par ordre, donnent $\varphi : f :: C \times v^2 \times q^2 : B \times u^2 \times p^2$. D'où l'on voit que *les forces* φ *&* f, *qui résultent perpendiculairement contre les deux plans* C *&* B, *sont entr'elles en raison composée des plans, des quarrés des vîtesses des fluides, & des quarrés des sinus des angles d'incidence.*

(344.) COROLLAIRE III. Soient *(Fig. 50 & 51)* deux fluides $MXZN$, $EGHF$, qui vont choquer obliquement les deux plans AB, CD, qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, avec les vîtesses IO, LS. Représentons les vîtesses des deux fluides par les droites IT, LQ; ensuite décomposons la vîtesse IT en deux autres IO, IP, dont l'une IO est la même que celle du plan AB; & la vîtesse LQ en deux autres LS, LK, dont l'une LS est la même que celle du plan CD. Les deux vîtesses IP, LK, & les angles PIA, KLC, qu'elles forment avec les plans AB, CD, sont des quantités qu'on peut déterminer par les Fig. 50 & 51.

règles de la Trigonométrie, puisque, dans les deux parallélogrammes *IPTO*, *LKQS*, on connoît les diagonales *IT*, *LQ*, les côtés *IO*, *LS*, les angles *OIT*, *SLQ*, & de plus les angles *TIA*, *QLC*. Or, il est clair que les fluides n'agissent sur les plans qu'en vertu des vitesses *IP*, *LK*, puisque ces plans, par leurs vîtesses propres, se soustraient entièrement à l'effet des vitesses *IO*, *LS*. Ainsi les deux chocs seront absolument les mêmes que si, les plans étant supposés en repos, les fluides venoient les choquer avec les vîtesses *IP*, *LK*. Donc, si l'on nomme f & f' les forces qui résultent perpendiculairement aux plans *AB*, *CD*, en vertu de ces chocs; p le sinus de l'angle *PIA*; q le sinus de l'angle *KLC*: on aura, par l'article précédent, $f : f' :: AB \times (IP)^2 \times p^2 : CD \times (LK)^2 \times q^2$.

Cette proportion sert à comparer les chocs que deux fluides exercent perpendiculairement contre deux plans qui ont, par d'autres causes, des mouvemens donnés, parallèlement à eux-mêmes.

(345.) SCHOLIE GÉNÉRAL. Ayant ainsi appris à comparer ensemble les différentes espèces de percussions des fluides, il ne s'agit plus que de connoître la mesure absolue de l'une d'entr'elles, pour en conclure celle de toutes les autres. Or, suivant l'expérience, *la percussion perpendiculaire & directe d'un fluide indéfini contre un plan en repos, est égale sensiblement au poids d'une colonne de ce fluide,*

laquelle auroit pour base la surface choquée, & pour hauteur la hauteur dûe à la vîtesse avec laquelle se fait la percussion; de sorte que si l'on nomme P cette percussion, s^2 la surface du plan choqué, h la hauteur dûe à la vîtesse du fluide, p la pesanteur spécifique de ce même fluide, on a à peu de chose près, $P = p\, s^2\, h$. On sait déterminer h, par les loix de la chute des graves.

Par exemple, supposons que la surface s^2 soit un pied quarré, & que le fluide soit de l'eau douce, dont le pied cube pèse 70 livres, à peu de chose près; que dans le cas présent, cette eau aille choquer le plan, avec une vîtesse uniforme de 1 pied par seconde: on trouvera que la percussion P est équivalente à un poids d'environ 19 onces.

La percussion des fluides qui se meuvent dans des canaux étroits, ou dans des coursiers, contre des plans qui occupent presqu'entièrement la largeur de ces coursiers, est plus considérable, comme on le verra dans la suite, par la voie de l'expérience.

Faisons quelques applications générales de la Théorie précédente.

(346.) Problème I. *Le triangle isoscèle* A C B (Fig. 52) *en repos, étant exposé au choc d'un fluide dont la direction est perpendiculaire à sa base* A B: *on demande le rapport de l'impulsion que recevra ce triangle parallèlement à sa hauteur* C D, *à l'impulsion directe & perpendiculaire que recevroit sa base* A B? Fig. 52.

En nommant F l'impulsion directe contre AD ou DB; f l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre AC ou CB; R le sinus total : on aura (342), $F : f :: AD \times R^2 : AC \times (\text{sin. } ACD)^2 :: AD \times (AC)^2 : AC \times (AD)^2 :: AC : AD$. Donc, $f = \frac{F \times AD}{AC}$. Considérons maintenant que les impulsions sur AC & sur CB se détruisent en partie ; car si l'on prend deux filets correspondans OR, or, & que représentant les impulsions perpendiculaires aux points R & r par les droites RF, rf égales & perpendiculaires aux côtés AC, CB du triangle, on fasse les parallélogrammes rectangles $ERHF$, $erhf$, dont les côtés RH, rh soient parallèles à AB, & les côtés RE, re parallèles à CD ; il est clair que des quatre forces RH, RE, rh, re, dans lesquelles les forces RF, rf se décomposent, les deux RH, rh se détruiront mutuellement, & qu'il ne restera que les deux forces RE, re, pour pousser le triangle parallèlement à CD. De plus, si l'on nomme φ la force RE ou re, on aura, $f : \varphi :: RF : RE :: AC : AD$; & par conséquent $\varphi = \frac{f \times AD}{AC}$. Mettant pour f sa valeur $\frac{F \times AD}{AC}$, on aura, $\varphi = \frac{F \times (AD)^2}{(AC)^2}$. Donc, $\varphi : F :: (AD)^2 : (AC)^2$; & $2\varphi : 2F :: (AD)^2 : (AC)^2$, proportion qui nous apprend que *l'impulsion reçue par le triangle parallèlement à sa hauteur, est à l'impulsion directe que recevroit sa base, comme le quarré de la demi-base, est au quarré*

quarré de l'un des côtés. Connoiſſant donc la ſeconde de ces forces, on connoîtra auſſi la première.

(347.) Corollaire I. Donc, lorſque le triangle iſocèle ACB eſt rectangle, l'impulſion qu'il reçoit parallèlement à ſa hauteur n'eſt que la moitié de l'impulſion directe que recevroit ſa baſe. Car alors le triangle rectangle ADC eſt iſocèle, & on a, $(AD)^2 : (AC)^2 :: 1 : 2$.

(348.) Corollaire II. Il ſuit encore de-là que ſi l'on a un quarré $ACBM$ (*Fig. 53*) qui ſoit frappé d'abord dans la direction de ſa diagonale CM, enſuite perpendiculairement à l'un de ſes côtés AC : la première impulſion ſera à la ſeconde, comme 1 eſt à $\sqrt{2}$, ou comme 7 eſt 10 environ. Car, dans le premier cas, il n'y a que le triangle ACB qui reçoive le choc, l'autre moitié AMB du quarré n'en eſt point affectée ; & dans le ſecond, il n'y a que le côté AC de choqué. Donc, en nommant M la première impulſion, A la ſeconde, & de plus B l'impulſion perpendiculaire que recevroit AB, on aura ces deux proportions, $M : B :: 1 : 2$; $B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1$; d'où l'on tirera deux valeurs de B, leſquelles étant égalées entr'elles, donneront la proportion, $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$. Fig. 53.

(349.) Problème II. *La demi-circonférence* A Q B (Fig. 54) *étant choquée par un fluide dont la direction* O C *eſt perpendiculaire au diamètre* A B : *on demande le rapport de l'impulſion que recevra* Fig. 54.

cette demi-circonférence parallèlement à O C, à l'impulsion directe & perpendiculaire que recevroit le diamètre A B!

Ayant divisé la demi-circonférence AQB en une infinité d'élémens Ff, Ll, &c, par les droites FL, fl parallèles au diamètre AB; & ayant mené les ordonnées FS, fs, LT, lt, &c: si l'on nomme F le choc direct que recevroit FR, ou Ss, φ le choc que reçoit Ff parallèlement à QC, on aura, (346), $\varphi = \frac{F \times (FR)^2}{(Ff)^2}$. Soit mené le rayon CF: les triangles semblables FRf, FSC donneront, $FR : Ff :: FS : CF$, & par conséquent $\frac{(FR)^2}{(Ff)^2} = \frac{(FS)^2}{(CF)^2}$. Donc, $\varphi = \frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$. Ainsi, pour avoir l'impulsion totale que reçoit la demi-circonférence parallèlement à OC, il ne s'agit plus que de trouver la somme de toutes les quantités $\frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$ ou $\frac{Ss \times (FS)^2}{(CF)^2}$, en représentant l'impulsion directe contre FR ou Ss par cette ligne elle-même. Or, si l'on fait tourner le demi-cercle ABQ autour du diamètre AB, il produira une sphère qui aura pour élément $\frac{m}{1} \times (FS)^2 \times Ss$, $\frac{m}{1}$ étant le rapport de la circonférence au diamètre. Par conséquent l'impulsion totale demandée est au solide de la sphère, dans le rapport constant de $\frac{1}{(CF)^2}$ à $\frac{m}{1}$. Mais le solide de la sphère $= m \times (CF)^2 \times \frac{2}{3} AB$. Donc l'impulsion cherchée

$= \frac{2}{3} AB$; c'eſt-à-dire que l'impulſion directe contre *A B* étant repréſentée par cette même ligne *A B*, l'impulſion que reçoit la demi-circonférence, parallèlement à *O C*, eſt repréſentée par les deux tiers de *A B*. Ces deux impulſions ſont donc entr'elles dans le rapport de 3 à 2; & l'une étant connue, l'autre le ſera auſſi.

Suivant cette théorie, l'impulſion reçue par un cylindre vertical placé au milieu d'une rivière, eſt les deux tiers de celle que recevroit le parallèlépipède rectangle, circonſcrit au même cylindre, & expoſé par l'une de ſes faces au choc perpendiculaire du fluide. Car le demi-cylindre antérieur & la face correſpondante du parallèlépipède circonſcrit, ſont les ſeules parties qui reçoivent le choc du fluide; elles en garantiſſent les autres parties.

(350.) PROBLÈME III. *Déterminer en général l'impulſion d'un fluide contre une courbe quelconque, ou contre un ſolide quelconque!*

La poſition de la courbe étant donnée, on trouvera (341) l'impulſion qui réſulte perpendiculairement contre l'un de ſes élémens. Cette impulſion pourra toujours être exprimée en fonctions d'une ſeule variable, au moyen de l'équation de la courbe donnée. On la décompoſera en deux forces, parallèles chacune à chacune de deux lignes données de poſition, que je nomme *A*, *B*, & que je ſuppoſe perpendiculaires entr'elles, pour plus de ſimplicité. Par-là, on aura deux ſortes de forces,

dont on déterminera les sommes, ou les résultantes, par l'intégration : de plus, on trouvera les positions de ces résultantes, par la théorie des momens. On connoîtra donc les quantités & les directions des forces actuelles qui poussent la courbe parallèlement aux deux lignes *A, B;* & par conséquent aussi la résultante de ces deux forces.

La même méthode s'applique à un solide quelconque, en décomposant l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre l'un des élémens de ce solide, en trois forces parallèles chacune à chacune de trois lignes données de position *A, B, C,* qui se croisent en un point, & que l'on peut supposer perpendiculaires entr'elles.

Comme les calculs que ces méthodes générales demandent, sont un peu longs, sans être difficiles, & que d'ailleurs ils ne peuvent pas être d'un grand usage, je me borne à donner ici les formules pour les cas les plus simples.

Fig. 55. 1.° Soit FQQ' (*Fig. 55*) une courbe, divisée en deux parties égales & semblables QF, QF' par son axe QC; & frappée par un fluide dont la direction est parallèle à cet axe. Ayant mené à l'axe QC, les ordonnées infiniment voisines, PF, pf, & la droite Fr parallèle à QC, soient $PM = y$; $fr = dy$; $Ff = ds$; la vîtesse du fluide $= V$. Nommons de plus F l'impulsion perpendiculaire d'un fluide mu avec la vîtesse U contre une surface plane A donnée & en repos; on voit (337) que l'impulsion perpendiculaire

contre fr a pour expression $\frac{F.V^2.dy}{A.U^2}$, ou $n.V^2\,dy$, en nommant, pour abréger, n le coéfficient $\frac{F}{A.U^2}$, qui est constant & donné, & que j'appellerai en général le *coéfficient de la percussion* *. L'impulsion qui résulte perpendiculairement contre Ff, étant décomposée en deux forces, l'une dirigée suivant FP, l'autre suivant Fr, & la première de ces forces étant détruite par une force égale & contraire qui provient du point F'; il s'ensuit (346) que l'impulsion contre Ff, dans le sens Fr, est $nV^2dy \times \frac{dy^2}{ds^2}$, ou $\frac{nV^2.dy^3}{ds^2}$. Il ne s'agit plus que d'éliminer ds de cette formule, au moyen de l'équation de la courbe; puis d'intégrer.

Supposons, par exemple, que FQF' soit un cercle dont le rayon $CQ = a$. On aura $ds^2 = \frac{a^2\,dy^2}{aa-yy}$; & la formule générale $\frac{nV^2.dy^3}{ds^2}$ deviendra $\frac{nV^2dy.(aa-yy)}{a^2}$, dont l'intégrale est $nV^2y - \frac{nV^2.y^3}{3a^2}$; valeur de l'impulsion contre l'arc indéterminé QF, dans le sens QC. Faisant $y = a$, on aura $\frac{2nV^2a}{3}$ pour l'impulsion contre le quart de circonférence. Et comme l'impulsion perpendiculaire contre le rayon a seroit (337), $nV^2.a$: on voit que l'impulsion contre

* Il faudra se souvenir de cette expression & du sens que j'y attache, parce que j'en ferai un fréquent usage.

le quart de circonférence, eſt les deux tiers de l'impulſion perpendiculaire contre le rayon; & l'impulſion contre la demi-circonférence, les deux tiers de l'impulſion perpendiculaire contre le diamètre; ce qui eſt conforme à l'article précédent.

Soit, pour ſecond exemple, QF une parabole dont le paramètre $= p$. On trouvera $ds^2 = \frac{dy^2(pp+4yy)}{p^2}$; & la formule $\frac{nV^2.dy^3}{ds^2}$ deviendra, $\frac{nV^2.p^2dy}{pp+4yy}$, dont l'intégrale eſt $nV^2\int\frac{\frac{p^2}{4}dy}{\frac{pp}{4}+yy}$, c'eſt-à-dire, le produit de la quantité conſtante nV^2, par un arc de cercle dont la tangente eſt y pour le rayon $\frac{p}{2}$.

2.° Que la courbe QPF, en faiſant une révolution entière autour de l'axe QC, produiſe un ſolide. L'élément Ff engendre une zone qui reçoit, dans le ſens QC, une impulſion (la ſeule à laquelle il faille avoir égard), qui eſt évidemment à l'impulſion perpendiculaire contre la couronne circulaire correſpondante engendrée par fr, comme la ſimple impulſion contre Ff, dans le ſens QC, eſt à l'impulſion perpendiculaire contre fr, c'eſt-à-dire, comme $\frac{nV^2.dy^3}{ds^2}$ eſt à $nV^2.dy$, ou comme dy^2 eſt à ds^2. Or, en nommant m le rapport de la circonférence au diamètre, l'impulſion perpendiculaire contre la couronne décrite

par fr, est $nV^2 \times 2my\,dy$. Ainsi l'impulsion élémentaire contre la zone décrite par Ff, dans le sens QC, sera $\frac{2nmV^2 \cdot y\,dy^3}{ds^2}$. On substituera dans cette expression, pour ds^2 sa valeur donnée par la nature de la courbe; puis on intégrera.

Soit, par exemple, FQF' un cercle dont le rayon $CQ = a$. En mettant pour ds^2 sa valeur $\frac{a^2\,dy^2}{aa-yy}$, la formule précédente deviendra $\frac{2nmV^2y\,dy\,(aa-yy)}{a^2}$, dont l'intégrale est $nmy^2V^2 - \frac{nmV^2y^4}{2a^2}$. Faisant $y = a$, on aura $\frac{nmV^2a^2}{2}$ pour l'impulsion contre la demi-sphère, ou contre la sphère entière (car cela est indifférent). L'impulsion perpendiculaire contre le plan d'un grand cercle de la sphère, seroit $nV^2 \times ma^2$. Ainsi l'impulsion contre la sphère n'est que la moitié de l'impulsion perpendiculaire contre l'un de ses grands cercles.

Si QF est une parabole dont le paramètre $= p$, la formule $\frac{2nmV^2 \cdot y\,dy^3}{ds^2}$ deviendra $\frac{2nmV^2p^2y\,dy}{pp+4yy}$, dont l'intégrale est $\frac{nmV^2p^2}{4} L. \left(\frac{pp+4yy}{pp}\right)$.

REMARQUE sur les trois problèmes précédens.

(351.) La solution du premier de ces problèmes s'accordera assez avec l'expérience, pourvu que l'angle ORC ou ACD (*Fig.* 52) d'incidence du fluide sur chacune des faces du triangle, Fig. 52.

foit un peu grand, c'eſt-à-dire, compris dans l'intervalle de 60 à 90 degrés. Mais, pour les angles d'incidence qui feroient fenfiblement moindres que 60 degrés, la théorie ne s'accorde plus avec l'expérience. Alors la percuſſion ne diminue pas autant, fuivant l'expérience, qu'elle devroit diminuer fuivant la théorie.

Les deux autres problèmes ne font deſtinés qu'à montrer la manière d'appliquer la théorie propofée aux furfaces courbes. Car l'expérience contredit encore ici cette théorie, mais dans un autre fens. En effet, l'expérience fait voir, par exemple, que l'impulfion contre la demi-cir-
Fig. 54. conférence *AQB* (*Fig. 54*), n'eſt qu'un peu plus de la moitié de l'impulfion perpendiculaire contre le diamètre *AB*, tandis que fuivant la théorie, elle en devroit être les deux tiers. On voit par-là que tous les ufages qu'on a faits de cette théorie pour déterminer *le folide de la moindre réſiſtance*, ou pour réfoudre en général les problèmes qui fe rapportent à la méthode inverfe des tangentes, ne donnent que des réfultats hypothéthiques, qu'on ne doit appliquer à l'art Nautique, qu'avec beaucoup de circonfpection.

J'ajoute encore ici un problème, dépendant de la même théorie, pour éclaircir l'explication que Léibnitz a donnée des variations du Baromètre, & que nous avons rapportée (116).

(352.) PROBLÈME IV. *Un corps fphérique, deſcendant verticalement dans un fluide où il eſt plongé,*

on demande l'effort qui résulte de ce mouvement contre le fond du vase ?

Il est évident que le corps, en descendant, frappe à chaque instant le fluide par sa vîtesse acquise; & que ce choc, qui se transmet en tous sens à travers le fluide, agit aussi contre le fond du vase. Cherchons donc sa valeur.

Soient
- le rayon du corps.................. $= a$,
- sa masse ou son poids.............. $= P$,
- le poids du fluide déplacé par le corps... $= P'$,
- l'espace parcouru verticalement....... $= s$,
- la vîtesse au bout de cet espace....... $= u$,
- le coëfficient de la percussion........ $= n$,
- le rapport de la circonférence au diamètre.......................... $= m$.

Le corps est poussé à chaque instant de haut en bas par l'excès de son poids sur le poids du fluide déplacé, & sur la résistance qu'il éprouve en frappant le fluide, laquelle a pour valeur $\frac{nma^2u^2}{2}$ (350). Ainsi, la force accélératrice absolue du corps est, $P - P' - \frac{nma^2u^2}{2}$; & on a, par les formules ordinaires de ces sortes de mouvemens, $Pudu = (P - P' - \frac{nma^2u^2}{2})\,ds$; ou $ds = -\frac{P}{nma^2} \times -\frac{2nma^2udu}{2P - 2P' - nma^2u^2}$, dont l'intégrale est, $s = A - \frac{P}{nma^2} \times L.(2P - 2P' - nma^2u^2)$. La constante A doit être telle que $s = 0$, donne $u = 0$; & par conséquent

on a, $s = \frac{P}{nma^2} \times L.\left(\frac{2P - 2P'}{2P - 2P' - nma^2u^2}\right)$. Donc ſi l'on nomme c le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1 ; qu'on multiplie s par $L.c$; & qu'enſuite on repaſſe des logarithmes aux nombres, on trouvera, $u^2 = 2\left(\frac{P - P'}{nma^2}\right) \times \left(1 - c^{-\frac{nma^2 . s}{P}}\right)$. L'expreſſion du choc du fluide, c'eſt-à-dire $\frac{nma^2u^2}{2}$, devient donc,

$$(P - P') \times \left(1 - c^{-\frac{nma^2 . s}{P}}\right).$$

Comme le nombre c eſt plus grand que l'unité, étant compris entre 2 & 3, on voit que la valeur du choc augmente à meſure que s augmente, & que ce choc $= P - P'$, lorſque $s = \infty$.

Il ſuit de-là que la hauteur dont une goutte de pluie tombe, n'étant jamais fort conſidérable, la réſiſtance qu'elle éprouve en deſcendant, ou la preſſion qu'elle exerce en conſéquence ſur la ſurface de la Terre, eſt toujours ſenſiblement moindre que le poids de cette même goutte. La preſſion de l'air ſur la cuvette du Baromètre eſt donc moindre lorſque les gouttes pluviales tombent, que lorſquelles ſont ſoutenues en parcelles dans l'atmoſphère; & par conſéquent le Baromètre doit alors baiſſer, comme Leibnitz le conclut de ſon hypothèſe.

CHAPITRE XIV.

Considérations générales sur les machines Hydrauliques : Théorie particulière de celles qui sont mues par le choc de l'eau.

(353.) ON appelle indistinctement *machine hydraulique*, une machine qui est destinée à élever de l'eau à une certaine hauteur, ou qui est mue par l'action d'un courant. Les agens qui produisent ou entretiennent le mouvement dans le premier cas, peuvent être de telle espèce qu'on voudra. Souvent une machine destinée à élever de l'eau, est en même temps mue par l'action d'un courant. Elle est alors doublement hydraulique. Les effets de toutes ces machines se déterminent, comme ceux des autres, par les loix connues de la Mécanique.

(354.) Sans rappeler ces loix en détail, considérons que la force mouvante a toujours un rapport déterminable par la forme & le jeu de la machine, à l'effet réel & utile que cette même machine produit, relativement à l'objet qu'on s'est proposé en la construisant. Cette force & cet effet peuvent s'exprimer par des poids connus, animés de vîtesses connues. Soient donc P le premier poids; V, sa vîtesse; Π, le second poids; v, sa vîtesse. Il est d'abord évident que l'effet $\Pi . v$ ne peut jamais

ſurpaſſer la cauſe $P.V$. C'eſt donc en vain que certains Machiniſtes penſent augmenter le produit de la force motrice, avec des leviers, des roues, ou d'autres moyens équivalens. Les leviers n'ont en eux-mêmes aucune vertu active : ils ne peuvent ſervir qu'à modifier différemment les deux facteurs P & V qui, par leur multiplication, compoſent la force mouvante. S'ils ſont augmenter le poids moteur P, ils ſont diminuer ſa vîteſſe V en même raiſon ; & réciproquement, s'ils ſont augmenter V, ils ſont diminuer P, dans le même rapport. L'effet $\Pi.\nu$ ſeroit égal à la cauſe entière $P.V$, ſi cette cauſe n'étoit pas employée en partie à vaincre le frottement, ou à produire dans la machine des mouvemens étrangers & inutiles à celui dont on a beſoin. On a donc dans la pratique, $P.V > \Pi.\nu$. La meilleure machine ſera celle qui, par ſa conſtruction & par le jeu de ſes pièces, rendra la quantité $\Pi.\nu$ la plus approchante qu'il eſt poſſible de $P.V$. Si l'on regarde $\Pi.\nu$ comme l'effet total de la machine, ou que l'on comprenne dans cette quantité non-ſeulement l'effet utile, mais encore ceux qui proviennent des réſiſtances, on aura dans tous les cas, $\Pi.\nu = P.V$.

(355.) Le choix d'une machine, la recherche & la combinaiſon des parties dont elle doit être compoſée, relativement à l'effet qu'on veut qu'elle produiſe, appartiennent proprement à la Mécanique. Ici je me propoſe d'examiner en général l'action d'un fluide, comme principe moteur d'une

machine à laquelle cette action est transmise par une roue que le fluide fait tourner, soit en la frappant par sa vîtesse acquise, soit en la pressant par son poids, soit enfin en la poussant par une réaction contraire à la direction de son mouvement. M. Jean Albert Euler, digne fils & émule du grand Géomètre Léonard Euler, a traité ce sujet dans une excellente Dissertation qui remporta le Prix de l'Académie de Gottingue, en 1754. Il a sur-tout examiné avec le plus grand soin l'effet des machines mues par la réaction de l'eau : & telle est la fécondité de cette matière, qu'elle nous a encore procuré trois beaux Mémoires de M. Euler le père (*Académie de Berlin, 1750, 1751, 1754*).

(356.) M. Parent est le premier qui ait appliqué avec succès la théorie ordinaire de la percussion des fluides au mouvement des roues qu'un courant fait tourner par le choc (*Académie de Paris, 1704*). Sa méthode porte sur quelques suppositions un peu libres, qui facilitent & simplifient le calcul : mais, quand en suivant d'ailleurs les mêmes principes, on veut traiter la question avec plus de rigueur & plus de généralité, on rencontre des problèmes difficiles, dont la plupart étoient entièrement nouveaux, lorsque j'en fis le sujet d'un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie (*année 1769*). Voici cette même théorie, avec plus de détail & plus d'étendue.

(357.) Une roue qui tourne en vertu du choc

de l'eau, eſt garnie à ſa circonférence de palettes, vulgairement appelées *ailes* ou *aubes*, que le fluide vient frapper ſucceſſivement. Cet effort de l'eau fait, à chaque inſtant, la fonction d'un poids appliqué à l'une des extrémités d'un levier mobile autour de ſon autre extrémité, qui repréſente ici le centre de la roue. Je rapporte toutes les roues ainſi mues, à deux eſpèces : aux roues verticales, mues par un courant horizontal, & aux roues horizontales, dont les aubes inclinées à l'horizon, ſont frappées par un courant auſſi incliné. De plus, je ſuppoſe toujours que les aubes ſont dirigées au centre de la roue; me réſervant à examiner dans la ſuite, par la voie de l'expérience combinée avec la théorie, en quels cas il convient d'incliner les aubes au rayon. Commençons par les roues verticales.

(358.) Soit donc la roue verticale *AHLK*
Fig. 56. (*Fig. 56*), dont les aubes ſont frappés ſucceſſivement par le courant horizontal *XYTZ*, qui la fait ainſi tourner dans le ſens *AHLK*. Toutes ces aubes, égales entr'elles & également eſpacées, ſont des rectangles, dont les côtés *SK*, *ED*, *BA*, &c, dirigés au centre, expriment les *hauteurs* des aubes; & les autres côtés horizontaux, & repréſentés par les points *S*, *E*, *B*, &c, ſont les *largeurs* des aubes. Dans les premiers inſtans du choc de l'eau, le mouvement de la roue s'accélère par degrés, à peu-près comme le mouvement des corps qui tombent par la peſanteur. Mais cette

accélération eſt très-prompte ; & bientôt le mouvement de la roue parvient à l'uniformité. Alors, pour que ce mouvement ſe perpétue, il faut que le choc de l'eau ſoit contre-balancé à chaque inſtant par la réſiſtance que la machine lui oppoſe : réſiſtance qui exprime l'effet total de la machine, en y comprenant le frottement & les autres cauſes étrangères qui tendent à diminuer le produit véritable, le produit utile que l'on cherche à obtenir de la machine. Cet effet total peut toujours être repréſenté par un poids Π, attaché à l'extrémité d'une corde qui, par le moyen d'une poulie de renvoi, va s'envelopper autour de l'arbre de la roue, & fait monter ce poids à meſure qne la roue tourne. Nous ſuppoſons que le mouvement ſoit parvenu à l'uniformité, du moins ſenſiblement ; ce qui arrive en très-peu de temps. La manière dont il s'accélère dans les premiers inſtans, eſt abſolument inutile à conſidérer.

(359.) Le courant d'eau dans lequel les aubes de la roue viennent ſe plonger tour-à-tour, peut être regardé, ou comme indéfini en largeur ; telle eſt, par exemple, la largeur d'une rivière par rapport aux roues d'un moulin qu'elle fait tourner ; ou bien, la largeur du courant peut être limitée, & ſuffiſante ſeulement pour que les ailes n'éprouvent pas de frottement contre le fond & les bords : tels ſont les canaux ou les *courſiers*, qui amènent les eaux d'un réſervoir contre les ailes d'une roue. La percuſſion n'a pas la même meſure dans les deux

cas, comme nous le verrons dans la ſuite ; mais elle ſuit d'ailleurs les mêmes loix. C'eſt pourquoi nous emploîrons, pour tous les cas, l'expreſſion indéterminée *courant d'eau :* ſauf à fixer dans l'occaſion la véritable meſure du choc, ou la quantité que nous avons appelée le *coëfficient* de la percuſſion (350).

(360). Tout l'effet d'une roue mue par le choc de l'eau, dépend de la poſition & du nombre de ſes aubes ; de la vîteſſe de la roue relativement à celle du courant ; de la meilleure proportion entre la hauteur & la longueur des aubes ; & enfin des moyens d'économiſer, lorſque la choſe eſt néceſſaire & poſſible, la quantité de fluide choquant. Examinons par ordre ces différentes queſtions.

(361.) PROBLÈME I. *De deux aubes, l'une verticale, l'autre inclinée au courant, on demande celle qui reçoit de la part du fluide le plus grand moment d'impulſion ?*

On juge peut-être au premier coup-d'œil que l'aube verticale, c'eſt-à-dire celle qui eſt frappée perpendiculairement, doit procurer le plus grand moment d'impulſion ; & tel eſt en effet le réſultat du calcul, quand la roue a de la vîteſſe au moment du choc. Mais les Auteurs d'Hydraulique ont agité ce problème, parce que ſi la percuſſion perpendiculaire eſt plus grande que la percuſſion oblique, la ſurface choquée obliquement eſt plus grande

grande que la surface choquée perpendiculairement ; ce qui fait une espèce de compensation ; & que d'ailleurs, quand la roue est en repos, les momens des deux percussions sont égaux. Il n'y a donc qu'un calcul exact qui puisse décider clairement la question.

Le courant $XYTZ$ (*Fig. 56*) ayant une direction horizontale, supposons que l'aile AB soit placée dans la verticale, & l'aile suivante DE, dans une position oblique du courant; menons l'horizontale EO. On voit que la partie AO de l'aile AB, seroit frappée perpendiculairement & librement par le fluide, si l'aile DE qui la couvre & empêche le choc, étoit anéantie; tandis que VE est la partie de l'aile DE qui est réellement frappée obliquement par le fluide. La question est donc de comparer le moment de la percussion perpendiculaire & libre contre AO, au moment de la percussion qui résultera perpendiculairement contre VE; car, si l'on trouve que le premier moment est plus grand que le second, il ne s'agira plus que de faire en sorte que l'aile verticale, au moment du choc, ne soit couverte en aucune manière par l'aile placée en arrière. Fig. 56.

Soient menées les horizontales infiniment voisines QM, qm, qui déterminent deux élémens correspondans Qq, Mm, de l'aube verticale & de l'aube inclinée. Que Mx représente la vîtesse du fluide; & les petits arcs Qt, My, les vîtesses

des points Q, M, pour un même inſtant. Je décompoſe la vîteſſe Mx du fluide en deux autres My, Mz, dont la première eſt la même que celle du point M de l'aube, & ne produit par conſéquent aucun effet ſur l'élément Mm, la ſeconde eſt la ſeule à laquelle il faille avoir égard. La percuſſion perpendiculaire contre l'élément Qq, eſt la même que ſi cet élément étant ſuppoſé en repos, l'eau venoit le frapper avec la vîteſſe $Mx - Qt$; & la percuſſion qui réſulte perpendiculairement contre l'élément Mm, eſt la même que ſi cet élément, étant ſuppoſé en repos, l'eau venoit le frapper avec la vîteſſe Mz. Donc, ſi l'on nomme n le *coëfficient* de la percuſſion; V la vîteſſe Mx du fluide; u la vîteſſe Qt du point Q; V' la vîteſſe Mz; R le rayon ou ſinus total; il s'enſuit (341) que la première percuſſion ſera repréſentée par $n \times Qq \times (V - u)^2 \times R^2$, & la ſeconde, par $n \times Mm \times V'^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2$. Par conſéquent, en déſignant les momens de ces deux percuſſions par la lettre M écrite au-devant des ſurfaces choquées; on aura, $M.Qq : M.Mm :: n \times Qq \times (V - u)^2 \times R^2 \times CQ : n \times Mm \times V'^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2 \times CM$. Or, à cauſe des arcs ſemblables Qt, My, qui donnent My ou $zx = u \times \frac{CM}{CQ}$, & à cauſe des deux triangles rectangles ſemblables Mnx, MQC, qui donnent $nx = V \times \frac{CQ}{CM}$: on trouve $nz = V \times \frac{CQ}{CM}$

$- u \times \frac{CM}{CQ} = (V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2}) \times \frac{CQ}{CM}$.

D'un autre côté, on a, ſin. $DMz = R \times \frac{nz}{Mz}$, & $(Mz)^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2 = R^2 \times (nz)^2$; ou $V'^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2 = R^2 \times (V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2})^2 \times \frac{(CQ)^2}{(CM)^2}$. Par conſéquent la proportion des momens deviendra, $M.Qq : M.Mm :: Qq \times (V - u)^2 \times CM : Mm \times (V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2})^2 \times CQ$; ou (à cauſe des parallèles MQ, mq, qui donnent $Qq : Mm :: CQ : CM$, & par conſéquent $Qq \times CM = Mm \times CQ$), $M.Qq : M.Mm :: (V - u)^2 : (V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2})^2$; proportion dont le troiſième terme étant évidemment plus grand que le quatrième, fait voir que le premier eſt auſſi plus grand que le ſecond. Ainſi, le moment de la percuſſion contre l'élément Qq choqué directement, eſt plus grand que le moment de la percuſſion contre l'élément Mm choqué obliquement. La même concluſion a lieu pour les ſurfaces finies AO, VE, qui ſont compoſées d'un même nombre d'élémens Qq, Mm, correſpondans chacun à chacun.

(362.) COROLLAIRE I. Lorſque les aubes ſont en repos au moment où elles ſont choquées

par le fluide, on a $u = 0$, & $M.Qq = M.Mm$. Il eſt donc alors indifférent que le fluide frappe la partie *A O* de l'aile verticale, ou la partie correſpondante *V E* de l'aile inclinée. Mais, comme la partie *O B* de l'aile verticale eſt encore frappée par le fluide, il s'enſuit que même en ce cas il eſt plus avantageux que l'aile choquée ſoit poſée verticalement, que d'être inclinée au courant.

(363.) COROLLAIRE II. Dans cette même hypothèſe de $u = 0$, le moment de l'impulſion contre la partie *V E* de l'aile inclinée, étant égal au moment de l'impulſion contre la partie *A O* de l'aile verticale, on voit que plus on multipliera le nombre des aubes, plus le fluide imprimera de force à la roue; car, en augmentant le nombre des aubes, on fait diminuer l'angle *E C B*, compris entre deux aubes voiſines, & on augmente par conſéquent le moment de l'impulſion que reçoit la roue, lorſque les ailes ſe trouvent, relativement au choc, dans la poſition la plus défavorable; poſition qui arrive quand l'angle compris entre deux aubes contiguës eſt diviſé en deux parties égales par la verticale.

Comme la loi de continuité s'obſerve conſtamment dans les différens états d'accroiſſement ou de décroiſſement que peuvent ſubir les quantités de même eſpèce, concluons encore de-là, que ſi une roue tourne avec une vîteſſe fort lente par

rapport à celle du fluide, on augmentera sa force en lui donnant un grand nombre d'ailes.

(364.) *REMARQUE I.* Il se présente à ce sujet une difficulté qui pourroit embarrasser quelques Lecteurs, & qu'il est à propos d'éclaircir. En supposant la roue immobile à l'instant du choc, il est clair que dans la rigueur géométrique, le nombre le plus avantageux d'ailes doit être *infini*. Or, dira-t-on, si le nombre des ailes devient infini, leurs extrémités formeront une circonférence de cercle *F B G O* (*Fig. 57*); & l'impulsion qui résultera perpendiculairement contre chaque élément *K N* de l'arc *F B G* étant dirigée au centre *C*, ne tendra à produire aucun mouvement de rotation; d'où il paroît s'ensuivre que bien loin que la roue reçoive alors le plus grand moment possible d'impulsion, elle n'en recevra point du tout. Mais il faut remarquer que dans notre calcul les ailes sont regardées comme une suite de plans différemment inclinés, tous dirigés au centre, & frappés par le fluide sous différentes obliquités; que si par conséquent on détruit cette hypothèse, on détruit nécessairement les conséquences qui en résultent. Or, la supposition que *F B G* est un arc-de-cercle, continu & composé d'élémens *K N*, qui loin d'être dirigés au centre *C*, sont perpendiculaires aux rayons *C K*, est entièrement contraire à la précédente. Il n'est donc pas surprenant qu'on arrive à des résultats très-différens dans les deux cas. Fig. 57.

Concluons cependant de-là, que comme les filets d'eau sont composés de molécules physiques, ou qui ont des grosseurs finies, & que de plus ces filets se gênent les uns les autres dans leurs mouvemens, les extrémités des ailes doivent toujours laisser entr'elles un certain intervalle qui permette au fluide d'exercer son action autant qu'il est possible. Le nombre d'ailes qu'il convient de donner à une roue en repos, & à plus forte raison à une roue en mouvement, pour se procurer la plus grande force qu'il est possible de la part du fluide, est donc toujours fini & limité. A quoi on peut ajouter qu'en multipliant le nombre des ailes, on rend la roue plus pesante, & par-là sujette à un plus grand frottement.

(365.) *REMARQUE II.* Plusieurs Auteurs *(Mém. de l'Acad. 1729, pag. 253; Architec. Hyd. Tome I, pag. 309)* ont établi en général l'avantage de l'aile verticale sur l'aile inclinée, d'une manière erronée. Voici leur raisonnement. Il est
Fig. 56. certain, disent-ils, que si l'aile *DE (Fig. 56)* trempe dans l'eau, tandis que l'aile *A B* est encore dans la verticale, la partie *V E* de la première couvrira la seconde sur toute la hauteur *A O* qui ne sera point frappée; & qu'ainsi l'aile *A B* sera seulement frappée dans la partie *O B*. Il est vrai, poursuivent-ils, que cette diminution de choc semble réparée par l'impulsion que reçoit la partie *V E*, qui est plus grande que la partie *A O*; mais la compensation n'est pas complète; car la percussion directe

contre AO ou VI, eſt à la percuſſion qui réſulte perpendiculairement contre VE, comme $VI \times R^2$, eſt à $VE \times (\text{ſin. } VEI)^2$, ou comme $VI \times (VE)^2$, eſt à $VE \times (VI)^2$, ou enfin comme VE eſt à VI. De-là, concluent-ils, il faut que l'extrémité E de l'aile DE (*Fig. 58*) ne faſſe que rencontrer la ſurface XY du fluide, au moment que l'aile AB ceſſe d'être verticale. Alors, il eſt facile de déterminer le nombre des ailes dont une roue doit être garnie ; car, dans le triangle rectangle EAC, on connoît le côté CA qui eſt le rayon de la roue $AHLK$, & l'hypothénuſe CE, puiſque la hauteur DE de l'aile eſt donnée. Ainſi on connoîtra l'arc DA. Diviſant la circonférence entière par la valeur de l'arc DA, le quotient exprimera le nombre des ailes de la roue. Les Auteurs dont il s'agit, ont ainſi calculé laborieuſement des Tables du nombre des ailes d'une roue, relativement au rayon de cette roue, & à la hauteur des ailes. Fig. 58.

Tout cet édifice de calcul tombe, 1.° parce qu'on n'y tient pas compte des différens bras de levier de l'aile verticale & de l'aile inclinée ; 2.° parce que ſi, dans le cas de la *Figure 58*, le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aile verticale AB eſt le plus grand qu'il eſt poſſible ; d'un autre côté, lorſque l'aile DE a pris une poſition telle que l'angle ECB eſt diviſé en deux parties égales par la verticale, le moment de l'impulſion eſt moindre alors qu'il ne ſeroit ſi la roue avoit

un plus grand nombre d'ailes, & qu'on étoit incertain si le moment *moyen* ne sera pas plus grand dans le second cas que dans le premier.

Ce même paralogisme a déjà été relevé dans un Mémoire sur les machines hydrauliques (*Savans Étrangers, Tome I, page 261*). Mais l'Auteur de ce Mémoire a lui-même employé un faux principe, d'après lequel il conclut que le moment de l'impulsion contre la partie *V E* de l'aile inclinée *D E* (*Fig. 56*) est toujours égal au moment de l'impulsion contre la partie correspondante *A O* de l'aile verticale, soit qu'au moment où la roue est choquée, elle soit en repos, soit qu'elle tourne déjà. La chose n'est vraie que pour le premier cas. Quand, à l'instant du choc, la roue a déjà une vîtesse acquise, le premier moment est moindre que le second. La manière dont l'Auteur en question mesure la percussion d'un fluide contre un plan mobile, est fautive. Il décompose la vîtesse du plan en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction du fluide; & il affirme que le fluide n'agit sur le plan qu'en vertu de l'excès de sa propre vîtesse sur la première des deux vîtesses dont on vient de parler. Or, il est évident qu'en vertu de la vîtesse que le plan a perpendiculairement à la direction du fluide, ce plan est repoussé par l'eau, de la même manière que s'il étoit en repos, & que l'eau vînt le frapper avec cette même vîtesse; d'où resulte une nouvelle impulsion qui se combine avec la première, & que l'Auteur

a négligée mal-à-propos. Son Mémoire contient d'ailleurs plusieurs choses vraies & utiles.

(366.) PROBLÈME II. *Déterminer la vîtesse que la roue doit prendre par rapport à celle du courant, pour que l'effet de la machine soit un* maximum!

Imaginons ici avec M. Parent (nous donnerons successivement plus de généralité au problème) qu'à la place des ailes $A B$, $D E$ (*Figure 56*), Fig. 56.
réellement choquées par le fluide, on substitue une seule aube qui soit frappée perpendiculairement, & qui, avant le choc, ait déjà une vîtesse uniforme & permanente; que la hauteur de cette aube fictive soit assez petite pour que les vîtesses de rotation de tous ses points puissent être censées égales, & que son centre de gravité puisse être regardé comme le centre de percussion du fluide. Nommons B la surface de cette aube; u la vîtesse de son centre de gravité; b la distance de ce point au centre de la roue; V la vîtesse du fluide; Π le fardeau élevé, dont la quantité de mouvement représente l'effet de la machine, v sa vîtesse, c son bras de levier par rapport au centre de la roue; n le coéfficient de la percussion: le choc perpendiculaire reçu par la surface B sera $n . B \times (V - u)^2$; & son moment par rapport au centre, $n . B (v - u)^2 \times b$. Égalant ce moment à celui du poids Π, on aura, $n . B (V - u)^2 \times b = \Pi c$. Et comme on a, $b : c :: u : v$, & par conséquent $c = \frac{b v}{u}$; si l'on met pour c cette valeur, on

aura, $n.B\,(V - u)^2.u = \Pi\,v$. Or, le produit $\Pi\,v$, qui exprime l'effet de la machine, doit être un *maximum ;* donc $n.B\,(V - u)^2.u$, ou simplement $(V - u)^2.u$, en sera auſſi un. Prenant donc la différentielle de cette quantité & l'égalant à zéro, on trouvera $u = \frac{V}{3}$; d'où l'on voit que l'aube qui reçoit le choc perpendiculaire du fluide, doit prendre le tiers de la vîteſſe du courant, afin que la machine produiſe le plus grand effet poſſible.

Quant à l'expreſſion de cet effet, on la trouvera, en mettant pour u ſa valeur $\frac{V}{3}$ dans l'équation $\Pi\,v = n.B\,(V - u)^2.u$: par-là, on aura $\Pi\,v = \frac{4\,n.B.V^3}{27}$.

(367.) COROLLAIRE. Pour pouvoir faire uſage de cette formule, fixons le coéfficient n ou $\frac{F}{A.U^2}$ de la percuſſion (350). La vîteſſe U & la ſurface A étant données, nous pouvons ſuppoſer ici, $A = B$, $U = V$. Cela poſé :

1.° Si la roue tourne dans un fluide indéfini en largeur, & qu'on nomme H la hauteur dûe à la vîteſſe de ce courant, on a ſenſiblement, ſuivant l'expérience, $F = B.H$. Ainſi l'expreſſion $\Pi\,v = \frac{4\,n\,B.V^3}{27}$ du plus grand effet de la machine, deviendra $\Pi\,v = B.H \times \frac{4}{27}\,V$. La meſure de cet effet eſt donc un poids d'eau,

exprimé par $B.H$, mu avec les $\frac{4}{27}$ de la vîtesse du fluide ; ou les $\frac{4}{27}$ de ce poids mu avec la vîtesse entière du fluide.

2.° Lorsque la roue tourne dans un coursier étroit où les aubes ont simplement la liberté de se mouvoir sans frottement, soit au fond, soit vers les parois; la percussion est plus grande, & l'expérience donne pour lors, $F = 2\ B.H$, à peu-près (H étant toujours la hauteur dûe à la vîtesse du courant). Le plus grand effet de la machine est donc en ce cas, $B \times H \times \frac{8}{27} V$, sensiblement.

(368.) *Remarque.* Nous pouvons évaluer l'effet de la machine dans les deux cas, d'une autre manière qui nous sera utile dans la suite. Pour cela, considérons qu'il est permis de regarder la surface donnée B de l'aile choquée comme un orifice par lequel il passe dans un temps donné une quantité donnée d'eau, puisque la vîtesse V du fluide est constante. Supposons que dans *une seconde*, il passe par B une quantité d'eau $= Q$; prenons pour base, d'après l'expérience, que les corps graves parcourent quinze pieds à peu-près, pendant la première seconde de leur chute; exprimons toutes les mesures linéaires en pieds; & souvenons-nous que dans les applications de nos formules, la loi des homogènes doit être remplie conséquemment à ces suppositions. En nommant g la gravité; H la hauteur dûe à la vîtesse V du fluide; k la hauteur dûe à la vîtesse v du fardeau Π: on aura $V^2 = 2\ g.H$; $v^2 = 2\ g.k$; & (201),

$Q = 2 B \surd 15 H$, ou $B = \frac{Q}{2 \surd 15 H}$. Par conféquent les expreffions du plus grand effet de la machine deviendront :

$$\text{I.}^{\text{er}} \text{ Cas, } \Pi \surd k = \frac{2 Q.H}{27 \surd 15},$$

$$\text{II.}^{\text{e}} \text{ Cas, } \Pi \surd k = \frac{4 Q.H}{27 \surd 15}.$$

(369.) PROBLÈME III. *La roue étant toujours fuppofée conduite par l'impulfion perpendiculaire du fluide contre une feule aube rectangulaire donnée en furface, mais dont la hauteur n'eft plus regardée comme infiniment petite : on demande le rapport que la largeur & la hauteur de l'aube doivent avoir entr'elles, & la vîteffe qu'un point donné de l'aube doit prendre, afin que l'effet de la machine foit un* maximum ?

Fig. 56. Soient *(Fig. 56)* CB le rayon extérieur donné de la roue ; AB la hauteur de l'aube qui eft frappée librement & en entier, & dont la largeur eft une ligne droite horizontale ; ab fa pofition après un inftant ; Qq l'un quelconque de fes élemens ; Π le fardeau élevé, lequel exprime par fa quantité de mouvement, l'effet de la machine.

Suppofons:
- CB .... $= a$,
- CA .... $= x$,
- CQ .... $= z$,
- la furface donnée de l'aube...... $= B$,
- fa largeur.................... $= r$,
- la vîteffe uniforme du courant... $= V$.

Suppofons $\left\{\begin{array}{l} \text{la vîteffe uniforme } Bb \text{ du point} \\ \quad \text{donné } B \text{ à l'inftant du choc} \ldots = u, \\ \text{la vîteffe du fardeau } \Pi \ldots\ldots\ldots = v, \\ \text{fon bras de levier} \ldots\ldots\ldots\ldots = c, \\ \text{le coéfficient de la percuffion} \ldots\ldots = n. \end{array}\right.$

La vîteffe du point Q eft $\frac{zu}{a}$; & le moment de la percuffion perpendiculaire contre Qq, eft $n.r.z\,dz\,(V - \frac{zu}{a})^2$, expreffion qu'il faut intégrer en regardant z feule comme variable, de manière que l'intégrale s'évanouiffe lorfque $z = x$, & reçoive fa valeur complète lorfque $z = a$. Par-là on trouvera, que le moment de l'impulfion contre l'aube entière, eft

$$nr\left[\frac{V^2(a^2 - x^2)}{2} - \frac{2Vu(a^3 - x^3)}{3a} + \frac{u^2(a^4 - x^4)}{4a^2}\right].$$

Ce moment doit être égal à celui Πc du poids Π; & par conféquent on a

$$\Pi c = nr\left[\frac{V^2(a^2 - x^2)}{2} - \frac{2Vu(a^3 - x^3)}{3a} + \frac{u^2(a^4 - x^4)}{4a^2}\right].$$

Or, comme on a, $r(a - x) = B$; & que $a^2 - x^2 = (a - x)\times(a + x)$; $a^3 - x^3 = (a - x)\times(a^2 + ax + x^2)$; que $a^4 - x^4 = (a - x)\times(a^3 + a^2x + ax^2 + x^3)$; que de plus on a, $u : v :: a : c$, ou $c = \frac{av}{u}$;

il s'enfuit que l'équation précédente pourra fe changer en celle-ci,

$$(A) \quad \Pi v = n B \left[\frac{V^2 u (a + x)}{2 a} - \frac{2 V u^2 (a^2 + a x + x^2)}{3 a^2} + \frac{u^3 (a^3 + a^2 x + a x^2 + x^3)}{4 a^3} \right].$$

Maintenant, pour que l'effet Πv de la machine devienne un *maximum*, par les valeurs convenables de x & u, il faut différencier le fecond membre, en faifant varier fucceffivement x & u, & égaler à zéro chacune des deux différentielles, ce qui donnera ces deux équations:

$$6 a^2 V^2 u - 8 V u^2 a (a + 2 x) + 3 u^3 \times (a^2 + 2 a x + 3 x^2) = 0;$$

$$6 V^2 a^2 (a + x) - 16 V u a (a^2 + a x + x^2) + 9 u^2 (a^3 + a^2 x + a x^2 + x^3) = 0;$$

lefquelles, combinées enfemble, donneront les valeurs de x & u, qu'on fubftituera dans l'équation (A), pour avoir l'expreffion du plus grand effet de la machine. Je n'écris pas ces valeurs: dans chaque cas particulier on abrégera le calcul, en commençant par fubftituer, à la place des grandeurs connues, leurs valeurs numériques.

(370.) REMARQUE I. Si dans l'équation (A) on fuppofe que la hauteur de l'aube foit infiniment petite, ou fenfiblement telle par rapport au rayon a; alors, en fubftituant a pour x, & déterminant u, par la condition que Πv foit un *maximum*, on

trouvera $u = \frac{V}{3}$, comme dans l'*article 366.* Et en effet, les bases des calculs sont les mêmes dans les deux cas. Mais, si sans regarder la hauteur de l'aube comme infiniment petite, on la regarde seulement comme fort petite par rapport au rayon a, de sorte que supposant $a - x = h$, ou $x = a - h$, h soit une quantité donnée dont on puisse négliger le quarré & les puissances plus hautes : l'équation (A), en éliminant x, deviendra

$$\Pi\, y \doteq n B \left[\frac{V^2 u\,(2a - h)}{2a} - \frac{2 V u^2 (a - h)}{a} + \frac{u^3 (2a - 3h)}{2a} \right].$$

D'où l'on tire, en différenciant suivant u, & égalant la différentielle à zéro,

$$u = \frac{V(4a - 4h) - V\sqrt{(4a^2 - 8ah)}}{3(2a - 3h)},$$

pour l'expression de la vîtesse u la plus avantageuse. Cette formule s'applique principalement aux roues qui tournent dans des coursiers, parce qu'en effet la hauteur des aubes de ces roues est ordinairement fort petite par rapport au rayon extérieur.

Supposons, par exemple, $a = 8$ pieds, $h = 8$ pouces : on trouvera $u = \frac{22}{63} V$, à peu de chose près.

(371.) *REMARQUE II.* Les roues qui tournent dans des coursiers demandent une autre considération, qui peut être importante en certains

cas. Dans les calculs précédens, nous avons regardé la vîtesse *V* du fluide comme constante & donnée, quelques changemens qui arrivent aux dimensions & à la vitesse de l'aube; mais pour les coursiers, ces changemens peuvent influer d'une manière sensible sur l'action du fluide contre la roue. Je m'explique.

Fig. 59. Soit *SDKR* (*Fig. 59*) la face verticale d'un réservoir, dans laquelle est pratiqué le pertuis rectangulaire *MNOP*. Que *SR* représente le niveau de l'eau. Suposons qu'au pertuis *MNOP* soit adapté un canal ou coursier rectangulaire qui conduit l'eau contre les ailes d'une roue. Comme il faut toujours que les aubes aient un certain jeu dans le coursier pour éviter le frottement contre son fond & ses parois, nous pouvons imaginer que l'aube qui reçoit le choc perpendiculaire de l'eau, est représentée par le rectangle *mnop*, dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle *MNOP*, & en sont distans d'une petite quantité donnée. Ainsi, il n'y a que l'eau qui sort par le pertuis *mnop* qui soit employée à mouvoir l'aube; celle qui sort par les vides rectangulaires *Mp*, *No*, *Oz*, coule en pure perte. Concevons maintenant que l'aile *mnop* est transformée en une autre aussi rectangulaire *efgh* d'égale surface, & qu'en conséquence le pertuis *MNOP* soit transformé en un autre *EFGH*, tel que les jeux *Ee*, *Ff*, *Hi*, de la nouvelle aile sont les mêmes que ceux *Mm*, *Nn*, *Pz*, de la première. La quantité d'eau

d'eau que le réservoir peut fournir, étant supposée, limitée & *donnée*, il est clair que le niveau primitif s'abaissera quelque part en Sr. Or, reste à savoir si, en vertu de cette dépression, le moment de l'impulsion de l'eau contre l'aube ne diminue pas. Ce qui donne lieu à ce doute, c'est qu'il s'écoule d'autant plus d'eau en pure perte, que le vide rectangulaire Gi a une plus grande base GH; car la charge d'eau qui lui répond, est plus grande que celle qui répond aux vides latéraux Fg, Eh, Np, No. De-là naît le problème suivant.

(372.) PROBLÈME IV. *Déterminer les dimensions & la vîtesse les plus avantageuses d'une aube frappée perpendiculairement par un fluide, en supposant que les vîtesses du fluide, aux différens points de l'aube, soient dûes aux hauteurs correspondantes du réservoir!*

Soient $ABPM$ la moitié du pertuis; $Abpm$ la moitié de l'aube cherchée; C le centre de la roue; SR le niveau de l'eau dans le réservoir; Q un point indéterminé de l'aube, auquel répond une vîtesse dûe à la hauteur QT.

Supposons
- la gravité .... $= g$,
- le rayon extérieur Cb de la roue... $= a$,
- $2\,Am$ .... $= r$,
- CT .... $= p$,
- CA .... $= x$,
- CQ .... $= z$,

Suppofons { la vîteffe de rotation du point b de l'aube .... $= u$,
la vîteffe du fardeau élevé Π.... $= v$,
fon bras de levier............ $= c$,
le coéfficient de la percuffion... $= n$.

La vîteffe de l'eau qui fort par le petit orifice rectangulaire $Qqdc$, & qui choque en cet endroit la partie élémentaire de l'aube, a $\sqrt{[2g.(z-p)]}$, pour expreffion; la vîteffe de rotation du point Q de l'aube ou de fa partie élémentaire $Qpdc$, eft $\frac{zu}{a}$. Ainfi le moment élémentaire de l'impulfion perpendiculaire de l'eau fera $nr.zdz\left(\sqrt{[2g.(z-p)]}-\frac{zu}{a}\right)^2$. Donc, en intégrant de manière que l'intégrale s'évanouiffe lorfque $z = x$, & reçoive fa valeur complette lorfque $z = a$, on aura

$$nr\Big[\frac{2g(a^3-x^3)}{3}-gp(a^2-x^2)-\frac{2n\sqrt{2g}}{a}$$
$$\times\Big(\frac{2p^2[(a-p)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}}]}{3}$$
$$+\frac{4p[(a-p)^{\frac{5}{2}}-(x-p)^{\frac{5}{2}}]}{5}$$
$$+\frac{2[(a-p)^{\frac{7}{2}}-(x-p)^{\frac{7}{2}}]}{7}\Big)$$
$$+\frac{n^2(a^4-x^4)}{4a^2}\Big];$$

pour le moment de l'impulfion de l'eau contre l'aire entière $mnop$. Ce moment doit être égal à celui Πc du fardeau élevé. Mais, pour abréger & pour mettre tout de fuite fous fa dernière

forme, l'équation qui doit résulter de-là, observons que la surface de l'aube étant donnée, on a, (en nommant B cette surface), $r(a-x) = B$, ou $r = \frac{B}{a-x}$; observons de plus qu'on a, $u : v :: a : c$, ou $c = \frac{av}{u}$. En substituant ces valeurs de r & c, on aura pour l'équation de l'effet de la machine,

$$\Pi v = \frac{nBu}{a(a-x)} \Big[\frac{2g(a^3-x^3)}{3} - gp(a^2-x^2) \qquad \text{(B)}$$

$$- \frac{2u\sqrt{2g}}{a} \Big(\frac{2p^2[(a-p)^{\frac{3}{2}} - (x-p)^{\frac{3}{2}}]}{3}$$

$$+ \frac{4p[(a-p)^{\frac{5}{2}} - (x-p)^{\frac{5}{2}}]}{5}$$

$$+ \frac{2[(a-p)^{\frac{7}{2}} - (x-p)^{\frac{7}{2}}]}{7} \Big)$$

$$+ \frac{u^2}{a^2} \cdot \frac{(a^4-x^4)}{4} \Big].$$

Maintenant, soient Q, la quantité d'eau qui sort pendant une seconde, par l'orifice $MNOP$; ϖ chacune des petites lignes mM, nN, bB, qui expriment les jeux de l'aube dans le coursier: on aura $MN = r + 2\varpi$; $TB = a - p + \varpi$; $TA = x - p$; & en prenant pour principe d'expérience, que les corps graves parcourent quinze pieds pendant la première seconde de leur chute, l'article 216 donne,

$$Q = \frac{4l(r+2\varpi).\sqrt{15}.[(a-p+\varpi)^{\frac{1}{2}} - (x-p)^{\frac{1}{2}}]}{3}.$$

Subſtituant dans cette dernière équation, pour r ſa valeur $\frac{B}{a-x}$; dégageant p, au moins par approximation; puis ſubſtituant cette valeur dans l'équation (B), on aura une équation, dans laquelle il n'entrera plus d'indéterminées que x & u, la quantité Q étant ſuppoſée donnée. On rendra donc l'effet de la machine, un *maximum*, en différentiant le ſecond membre de cette équation, ſuivant x & u, & égalant à zero, les deux différentielles; ce qui donnera deux équations analogues à celles que l'on a tirées de l'équation (A) dans l'article 369, & tendantes au même but.

Si Q n'étoit pas donné, mais que p le fût, ou que le niveau SR de l'eau dans le réſervoir occupât une poſition fixe, on différencieroit tout de ſuite l'équation (B), ſuivant x & u; &c.

Si dans l'équation (B), p & x étoient données, on différencieroit ſuivant u ſeulement; & on auroit un réſultat analogue à celui de l'article 370.

Je me contente d'indiquer tous ces calculs, qui ſont, pour la plupart, fort longs, ſans être difficiles, & qu'on abrégera (ſi on eſt tenté de les entreprendre), en ſubſtituant dans chaque cas particulier, à la place des grandeurs connues, leurs valeurs numériques.

Ajoutons que dans la pratique, au lieu de chercher par ces méthodes générales, les dimenſions & la vîteſſe les plus avantageuſes de l'aube,

il vaudra mieux comparer ensemble les effets de deux aubes, telles que *mnop*, *efgh*, correspondantes aux deux pertuis *MNOP*, *EFGH*; & choisir celle qui, pour une quantité donnée d'eau, ou pour une hauteur donnée d'eau dans le réservoir, procure le plus grand effet. Ce tâtonnement ne sera jamais fort long; & on en tirera des résultats suffisamment exacts dans la pratique: car on sait qu'une quantité, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, jouit physiquement de la même prérogative, sur une certaine étendue, en deçà & au de-là de sa limite mathématique.



CHAPITRE XV.

Continuation du même sujet : des roues verticales mues par le choc de l'eau, en ayant égard aux différentes impulsions de l'eau contre les aubes réellement choquées.

(373). Nous avons réduit dans le chapitre précédent, les effets des impulsions de l'eau contre les aubes d'une roue, au seul effet d'une aube, qui seroit choquée perpendiculairement par le fluide. Cette transformation, qui simplifie le calcul, est permise quand la roue est en repos à l'instant du choc. Mais elle ne l'est pas, du moins en rigueur, quand la roue tourne déjà par une vîtesse acquise, au moment qu'elle reçoit le coup du fluide. Il faut alors, pour obtenir cette généralité si précieuse aux Géomètres, déterminer toutes les impulsions, à raison des différentes obliquités des chocs. Ce problème qui est résolu dans mon Mémoire de 1769, trouve ici sa véritable place. Commençons par établir les élémens qui doivent servir de base à mes calculs.

Fig. 60. (374) Soit *SBDK* (*Fig. 60*) la circonférence extérieure d'une roue, plongée dans un courant horizontal *XYTZ*, dont tous les points

ſe meuvent ſuivant des directions parallèles entr'elles, & avec une même vîteſſe uniforme. Que cette roue porte un nombre quelconque d'aubes *Ee, Ff, Gg, Hh*, &c, dirigées au centre *C*. Ayant abaiſſé la droite *CI*, verticale, ou perpendiculaire à la ſurface *XY* du fluide; ſoient menées parallèlement à la même ſurface les droites *E*1, *F*2, *G*3, *H*4, &c. Il eſt clair qu'en allant de *S* vers *B*, les dernières aubes ſont couvertes & garanties en partie du choc de l'eau, par les précédentes. J'aurai ſimplement égard à l'impulſion du fluide, contre les parties *EV, FV', GV"*, &c, des aubes; & je ſuppoſerai que les parties *V'f', V"g'*, &c, n'éprouvent aucun choc, ou du moins, je négligerai un tel choc, en cas qu'il exiſte réellement. Cette manière d'enviſager l'action du fluide me paroît exacte, ou du moins, très-admiſſible dans un problème phyſico-mathématique; tel que celui-ci, qui participe néceſſairement à la diſette où l'on eſt encore d'une méthode rigoureuſe, pour réſoudre en général le problème de la percuſſion des fluides. En effet :

1.° Dans les roues placées ſur des rivières, il eſt évident que le fluide, après avoir frappé les parties *EV, FV', GV"*, &c, ſe réfléchit, gliſſe par les côtés & ſe mêle avec le fluide environnant. Il ne leur reſte donc, dans le ſens du courant, qu'une vîteſſe fort petite, laquelle ne peut par conſéquent produire qu'un choc inſenſible. Je conviens que, ſi les intervalles des aubes

étoient très-considérables, le fluide pourroit acquérir de nouveau, dans l'intervalle de deux ailes, une vîtesse capable de donner une impulsion sensible à l'aube antécédente; mais ce cas n'a pas lieu dans la pratique, sur-tout quand on a besoin de donner (comme il convient de le faire) au moins huit à dix aubes à la roue.

2.° Quant aux roues plongées dans des coursiers, le fluide, après avoir choqué les parties EV, FV', GV'', &c, n'a pas tout-à-fait la même liberté de se dégager des aubes, que dans le premier cas; mais il trouve néanmoins à s'échapper; il glisse en partie sur les ailes; l'autre partie sort par les vides qui se trouvent entre l'aube & le coursier, & par le vide que deux aubes contiguës laissent au fond, lorsque la droite qui divise en deux parties égales, l'angle formé par les deux aubes, est placée dans la verticale. L'impulsion contre les parties EV, FV', GV'', &c, est donc toujours incomparablement plus sensible que le choc (supposé qu'il existe en effet), contre les parties $V'f'$, $V''g'$, &c, ou que la pression soufferte par ces mêmes parties, en vertu de la hauteur.

(375.) PROBLÈME I. *Déterminer la somme des momens d'impulsions du fluide, contre toutes les parties des aubes, qui reçoivent à la fois ces impulsions, la roue étant supposée tourner par une vîtesse acquise, à l'instant du choc!*

I. Soit Mm un élément quelconque de la

partie EV de la première aube choquée. Du point S où la circonférence $SBDK$ rencontre la ſurface du fluide, ſoit mené le rayon SC. Que les droites infiniment petites Mx, My repréſentent reſpectivement les eſpaces parcourus en un inſtant, par le fluide & par le point M de l'aube. Je décompoſe la vîteſſe Mx en deux autres My, Mz : il eſt évident que le fluide n'agit ſur l'élément Mm qu'en vertu de la ſeconde vîteſſe Mz. Soit prolongée juſques en n la droite xz qui ſera évidemment perpendiculaire à EV. Dans les calculs des momens cherchés, nous ferons abſtraction de la largeur de chaque aube, parce que cette largeur eſt un facteur conſtant, dont on pourra enſuite affecter tous les termes des formules.

Soient
- le rayon extérieur CB de la roue.... $= a$,
- le ſinus total.................... $= 1$;
- l'angle conſtant SCI.............. $= m$,
- l'angle variable ECI.............. $= p$,
- l'angle conſtant compris entre deux aubes voiſines...................... $= q$,
- la viteſſe du fluide.................. $= V$,
- la viteſſe uniforme de la circonférence $SBDK$.................. $= u$,
- EM............................ $= x$,
- le coéfficient de la percuſſion.......... $= n$.

On aura évidemment My ou $zx = \frac{ux(a-x)}{a}$; $nx = V \cos. p$; $nz = nx - zx = V \cos. p$

$-\frac{x(a-x)}{a}$; $\text{fin.}\ z\ M\ n = \frac{x\ z}{M\ z} = \frac{a\ V\ \text{cof.}\ p - x\ (a-x)}{a \times M\ z}$ . . Donc, l'impulſion perpendiculaire du fluide contre l'élément $M\ m$, qui eſt $n \times M\ m \times (M\ z)^2 \times (\text{fin.}\ z\ M\ n)^2$, deviendra $\frac{x\ d\ x\ [a\ V\ \text{cof.}\ p - x\ (a-x)]^2}{a^2}$; & ſi l'on nomme $d\ M$ le moment de cette impulſion élémentaire, on aura

(A) $$d\ M = n\ d\ x \left(V - \frac{x\ (a-x)}{a\ \text{cof.}\ p}\right)^2 \times (\text{cof.}\ p)^2 . (a-x).$$

II. On voit que cette équation s'intègre ſans aucune difficulté. Mais avant que de faire cette opération, j'obſerve que ſi la quantité $V - \frac{x\ (a-x)}{a\ \text{cof.}\ p}$ au lieu d'être poſitive étoit négative, ce ſeroit l'aile qui pouſſeroit le fluide au lieu d'en être pouſſée. Cependant comme le quarré de l'une & l'autre expreſſion, eſt toujours le même, on ne pourroit pas diſcerner lequel des deux cas a lieu, ſi l'on intégroit à l'ordinaire. Voici donc ce qu'il faut faire en général. On examinera ce que devient la quantité $V - \frac{x\ (a-x)}{a\ \text{cof.}\ p}$, lorſque $x = E\ V = C\ E - C\ V = a - \frac{C\ k}{\text{cof.}\ p} = a - \frac{a\ \text{cof.}\ m}{\text{cof.}\ p}$, & lorſque $x = 0$. Cela poſé, 1.° ſi la quantité en queſtion eſt poſitive

dans les deux cas, le fluide pouſſe l'aile dans toute l'étendue VE, & le calcul ſe fait comme nous le verrons tout-à-l'heure; 2.° ſi cette quantité eſt négative dans les deux cas, l'aile pouſſe le fluide dans toute l'étendue VE, & le calcul ſe fait encore de la même manière; 3.° ſi la même quantité eſt poſitive dans le premier cas, & négative dans le ſecond, une partie VR de l'aile eſt pouſſée par le fluide, tandis qu'au contraire l'autre partie RE de l'aile pouſſe le fluide. Alors on déterminera le moment M de manière que l'intégrale s'évanouiſſe lorſque $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ coſ. } p} = 0$, ou lorſque $x = \frac{au - Va \text{ coſ. } p}{u}$, & qu'elle reçoive ſa valeur complète, lorſque $x = EV = a - \frac{a \text{ coſ. } m}{\text{coſ. } p}$. Soit nommée G cette intégrale qui exprime le moment de l'impulſion de l'eau contre VR. On déterminera encore M de manière que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $x = 0$, & reçoive ſa valeur complète, lorſque $x = ER = \frac{au - Va \text{ coſ. } p}{u}$. Soit nommée H cette intégrale qui exprime le moment de l'impulſion de la partie RE de l'aile contre le fluide. Il eſt clair que $G - H$, ou $H - G$ repréſentera le moment de la force réſultante qui pouſſe l'aile ou le fluide.

Je n'ai pas beſoin d'ajouter que ſi la quantité

$V - \frac{u(a-x)}{a \text{ cof. } p}$ eſt poſitive en E, elle le ſera, à plus forte raiſon, en V, & dans toute l'étendue $E V$.

Il eſt évident que le procédé du calcul eſt le même dans les trois ſuppoſitions, & qu'il s'agit toujours de prendre une ſomme ou une différence de momens d'impulſion. Je n'examinerai ici que la première, parce que dans la pratique, il convient que le fluide pouſſe l'aube ſur toute l'étendue de la partie qu'elle trempe dans l'eau. Or cela arrivera, ſi l'on a ſeulement V cof. $p = u$, ou cof. $p = \frac{u}{V}$. Soit, par exemple, $u = \frac{V}{3}$: on aura cof. $p = \frac{1}{3}$, & par conſéquent l'angle $p = 70 \frac{1}{2}$ degrés. Il faut donc alors que la quantité, dont l'aube trempe dans l'eau, ſuivant la verticale, ſoit moindre que les deux tiers du rayon. L'enfoncement des roues qui trempent dans des courſiers, eſt toujours très-petit par rapport au rayon. Dans les roues placées ſur des rivières, l'enfoncement n'atteint pas, à beaucoup près, la limite qu'on vient d'indiquer. Ainſi, mon calcul aura toute la généralité dont nous avons beſoin. Il eſt clair que la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ cof. } p}$ étant ainſi ſuppoſée poſitive, les quantités $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ cof. } (p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ cof. } (p-2q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ cof. } (p-3q)}$, &c, ſeront poſitives, à plus forte raiſon.

III. En intégrant l'équation (A) de manière que l'intégrale s'évanouiffe, lorfque $x = 0$, & qu'elle reçoive fa valeur complète, lorfque $x = EV = a - \frac{a \text{ cof. } m}{\text{cof. } p}$, on trouvera

$$M = \frac{n a^2 V^2 (\text{cof. } p^2 - \text{cof. } m^2)}{2} - \frac{2 n a^2 V u}{3} \times$$
$$\left(\text{cof. } p - \frac{\text{cof. } m^3}{\text{cof. } p^2}\right) + \frac{n a^2 [illegible]}{4}\left(1 - \frac{\text{cof. } m^4}{\text{cof. } p^4}\right) *.$$

Nous ferons, pour abréger, $n a^2 V = N$, $u = k V$, k étant un coëfficient donné; en forte que $M = N \left[\frac{\text{cof. } p^2 - \text{cof. } m^2}{2} - \frac{2 k}{3} \times \right.$
$$\left. \left(\text{cof. } p - \frac{\text{cof. } m^3}{\text{cof. } p^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\text{cof. } m^4}{\text{cof. } p^4}\right) \right].$$

VI. En nommant M' le moment de l'impulfion de l'eau contre la partie FV' de l'aile fuivante, on trouvera toujours par la même méthode,

$$M' = N \left[\frac{\text{cof. } (p - q)^2 - \text{cof. } p^2}{2} - \frac{2 k}{3} \right.$$
$$\times \left(\text{cof. } (p - q) - \frac{\text{cof. } p^3}{\text{cof. } (p - q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}$$
$$\left. \times \left(1 - \frac{\text{cof. } p^4}{\text{cof. } (p - q)^4}\right) \right].$$

De même, en nommant M'', M''', &c, $M^{\wedge}$

---

* On voit qu'au lieu d'écrire $(\text{cof. } p)^2$, $(\text{cof. } m)^2$, &c, j'écris fimplement $\text{cof. } p^2$, $\text{cof. } m^2$, &c, pour abréger & pour éviter la multiplicité des parenthèfes.

respectivement, les momens des impulsions contre les parties $G\,V''$, $H\,V'''$, &c, & contre une partie indéterminée, on aura les équations,

$$M'' = N\left[\frac{\cos.(p-2q)^2 - \cos.(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos.(p-2q) - \frac{\cos.(p-q)^3}{\cos.(p-2q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos.(p-q)^4}{\cos.(p-2q)^4}\right)\right],$$

$$M''' = N\left[\frac{\cos.(p-3q)^2 - \cos.(p-2q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos.(p-3q) - \frac{\cos.(p-2q)^3}{\cos.(p-3q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos.(p-2q)^4}{\cos.(p-3q)^4}\right)\right].$$

....

$$M^{\lambda} = N\left[\frac{\cos.(p-\theta q)^2 - \cos.[p-(\theta-1)q]^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\cos.(p-\theta q) - \frac{\cos.[p-(\theta-1)q]^3}{\cos.(p-\theta q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\cos.[p-(\theta-1)q]^4}{\cos.(p-\theta q)^4}\right)\right];$$

le nombre entier $\theta + 1$ exprimant le nombre des ailes choquées.

V. Donc, si pour abréger l'expression, on prend,

$$S = \frac{M + M' + M''' + \ldots\ldots + M^{\lambda}}{N}$$

& qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$S = \frac{\text{cof.}\,(p-\theta q)^2 - \text{cof.}\,m^2}{2}$$

$$-\frac{2k}{3}\times\left\{\begin{array}{l}
\text{cof.}\,p - \dfrac{\text{cof.}\,m^3}{\text{cof.}\,p^2} \\
+\,\text{cof.}\,(p-q) - \dfrac{\text{cof.}\,p^3}{\text{cof.}\,(p-q)^2} \\
+\,\text{cof.}\,(p-2q) - \dfrac{\text{cof.}\,(p-q)^3}{\text{cof.}\,(p-2q)^2} \\
+\,\text{cof.}\,(p-3q) - \dfrac{\text{cof.}\,(p-2q)^3}{\text{cof.}\,(p-3q)^2} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+\,\text{cof.}\,(p-\theta q) - \dfrac{\text{cof.}\,[p-(\theta-1)q]^3}{\text{cof.}\,(p-\theta q)^2}
\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k^2}{4}\times\left\{\begin{array}{l}
1 - \dfrac{\text{cof.}\,m^4}{\text{cof.}\,p^4} \\
+\,1 - \dfrac{\text{cof.}\,p^4}{\text{cof.}\,(p-q)^4} \\
+\,1 - \dfrac{\text{cof.}\,(p-q)^4}{\text{cof.}\,(p-2q)^4} \\
+\,1 - \dfrac{\text{cof.}\,(p-2q)^4}{\text{cof.}\,(p-3q)^4} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+\,1 - \dfrac{\text{cof.}\,[p-(\theta-1)q]^4}{\text{cof.}\,(p-\theta q)^4}
\end{array}\right\}$$

formule qui donne pour un inſtant le moment total de l'impulſion de l'eau, quel que ſoit le nombre des ailes. Il eſt clair que S varie, à

mesure que (tout restant d'ailleurs le même) l'angle p varie, ou que la roue en tournant, prend différentes positions.

VI. Qu'outre les dénominations précédentes, on appelle encore Π le poids variable auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque instant ; c son bras de lévier ; dt l'élément du temps ; dy le petit arc décrit, pendant l'instant dt, par un point de la circonférence $SBDK$: on aura, $\Pi \times c = N.S$, & $\Pi \times c \times dt = N.S dt$. Mais $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$; (j'écris $-dp$, parce que t augmentant, p diminue). On aura donc, $\Pi \times c \times dt = -\frac{a\,N.S\,dp}{u}$, & $c\int \Pi\, dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$.

VII. Ayant substitué à la place de S sa valeur trouvée (N.° V), on aura dans le second membre de l'équation différentes sortes de termes. Je mets à part dans les calculs suivans, les coéfficiens constans. D'abord le terme dp (cos. $(p - \theta q)^2$ — cos. m^2) s'intègre facilement ; car il devient

$$\frac{dp}{2} + \frac{dp \text{ cos. } (2p - 2\theta q)}{2} - dp \text{ cos. } m^2,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{p}{2} + \frac{\text{sin. } (2p - 2\theta q)}{4} - p \text{ cos. } m^2.$$

L'intégrale de dp cos. p est sin. p ; celle de

dp

$d p$ cos. $(p - q)$ est sin. $(p - q)$; celle de $d p$ cos. $(p - 2q)$ est sin. $(p - 2q)$. Ainsi de suite pour les termes de cette espèce.

La seule difficulté est d'intégrer les termes $\frac{d p \text{ cos. } m^3}{\text{cos. } p^2}$, $\frac{d p \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2}$, $\frac{d p \text{ cos. } (p - q)^3}{\text{cos. } (p - 2 q)^2}$, &c. ainsi que les termes $\frac{d p \text{ cos. } m^4}{\text{cos. } p^4}$, $\frac{d p \text{ cos. } p^4}{\text{cos. } (p - q)^4}$, $\frac{d p \text{ cos. } (p - q)^4}{\text{cos. } (p - 2 q)^4}$, &c. Voici la manière de faire ces intégrations.

1.° Il est aisé d'intégrer $\frac{d p}{\text{cos. } p^2}$; car en faisant cos. $p = \frac{1}{z}$, on a $\frac{d p}{\text{cos. } p^2} = \frac{z\, d z}{\sqrt{(z z - 1)}}$, dont l'intégrale est $\sqrt{(z z - 1)} = \frac{\text{sin. } p}{\text{cos. } p}$.

2.° Pour intégrer $\frac{d p \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2}$, on observera que cos. p = cos. $[(p - q) + q]$ = cos. $(p - q)$. cos. q — sin. $(p - q)$. sin. q, & par conséquent $\frac{d p \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2} = d p \text{ cos. } (p - q) \text{ cos. } q^3 - 3 d p \text{ sin. } (p - q) . \text{sin. } q . \text{cos. } q^2 + \frac{3 d p \text{ sin. } (p - q)^2 \text{ sin. } q^2 \text{ cos. } q}{\text{cos. } (p - q)} - \frac{d p \text{ sin. } (p - q)^3 \text{ sin. } q^3}{\text{cos. } (p - q)^2}$ $= \text{cos. } q^3 . d p \text{ cos. } (p - q) - 3 \text{ sin. } q . \text{cos. } q^2 . d p \text{ sin. } (p - q) + 3 \text{ sin. } q^2 \text{ cos. } q . \frac{d p}{\text{cos. } (p - q)} - 3 \text{ sin. } q^2 \text{ cos. } q . d p \text{ cos. } (p - q) - \text{sin. } q^3 \frac{d p \text{ sin. } (p - q)}{\text{cos. } (p - q)^2} + \text{sin. } q^3 . d p \text{ sin. } (p - q)$.

Or, $\int dp \operatorname{cof.} (p-q) = \operatorname{fin.} (p-q)$; $\int dp \operatorname{fin.} (p-q) = -\operatorname{cof.} (p-q)$.

Le terme $\frac{dp}{\operatorname{cof.} (p-q)}$ s'intègre en faifant $\operatorname{cof.} (p-q) = \frac{1}{s}$; ce qui donne

$$dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right]}} = \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}},$$

$\frac{dp}{\operatorname{cof.} (p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, dont l'intégrale eft L. $[s + \sqrt{(ss-1)}]$ $= \text{L.} \left(\frac{1+\operatorname{fin.} (p-q)}{\operatorname{cof.} (p-q)}\right)$.

Le terme $\frac{dp \operatorname{fin.} (p-q)}{\operatorname{cof.} (p-q)^2}$ eft la même chofe que $\frac{-d.\operatorname{cof.} (p-q)}{\operatorname{cof.} (p-q)^2}$; & il a par conféquent pour intégrale $\frac{1}{\operatorname{cof.} (p-q)}$. Ainfi l'intégrale entière de $\frac{dp \operatorname{cof.} p^3}{\operatorname{cof.} (p-q)^2}$ eft $\operatorname{cof.} q^3 \operatorname{fin.} (p-q)$ $+ 3 \operatorname{fin.} q \operatorname{cof.} q^2 \operatorname{cof.} (p-q) + 3 \operatorname{fin.} q^2$ $\operatorname{cof.} q \times \text{L.} \left(\frac{1+\operatorname{fin.} (p-q)}{\operatorname{cof.} (p-q)}\right) - 3 \operatorname{fin.} q^2$ $\operatorname{cof.} q \operatorname{fin.} (p-q) - \frac{\operatorname{fin.} q^3}{\operatorname{cof.} (p-q)} - \operatorname{fin.} q^3$ $\operatorname{cof.} (p-q)$.

De même, en obfervant que $\operatorname{cof.} (p-q) =$ $\operatorname{cof.} [(p-2q)+q] = \operatorname{cof.} (p-2q)$ $\operatorname{cof.} q - \operatorname{fin.} (p-2q). \operatorname{fin.} q$, on trouvera

que l'intégrale de $\frac{dp \operatorname{cof.} (p-q)^3}{\operatorname{cof.} (p-2q)^2}$ eſt cof. q^3 ſin. $(p-2q) + 3$ ſin. q cof. q^2 cof. $(p-2q)$ $+ 3$ ſin. q^2 cof. q. L. $\left(\frac{1+\operatorname{fin.}(p-2q)}{\operatorname{cof.}(p-2q)}\right) -$ 3 ſin. q^2 cof. q ſin. $(p-2q) - \frac{\operatorname{fin.} q^3}{\operatorname{cof.} (p-2q)}$ $-$ ſin. q^3.cof. $(p-2q)$.

On intégrera par la même méthode les quantités analogues $\frac{dp \operatorname{cof.} (p-2q)^3}{\operatorname{cof.} (p-3q)^2}$, $\frac{dp \operatorname{cof.} (p-3q)^3}{\operatorname{cof.} (p-4q)^2}$, &c.

3.° Pour intégrer $\frac{dp}{\operatorname{cof.} p^4}$, on fera cof. $p =$ $\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$; & on aura $\frac{dp}{\operatorname{cof.} p^4} = dz +$ $z^2 dz$, dont l'intégrale eſt $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\operatorname{fin.} p}{\operatorname{cof.} p}$ $+ \frac{\operatorname{fin.} p^3}{3 \operatorname{cof.} p^3}$.

4.° Pour intégrer $\frac{dp \operatorname{cof.} p^4}{\operatorname{cof.} (p-q)^4}$, on obſervera, comme tout-à-l'heure, que cof. $p =$ cof. $[(p-q)+q] =$ cof. $(p-q)$ cof. $q -$ ſin. $(p-q)$. ſin. q; & que par conſéquent $\frac{dp \operatorname{cof.} p^4}{\operatorname{cof.} (p-q)^4} = dp$ cof. $q^4 -$ 4 cof. q^3 ſin. $q \times \frac{dp \operatorname{fin.} (p-q)}{\operatorname{cof.} (p-q)} + 6$ cof q^2 ſin. $q^2 \times \frac{dp \operatorname{fin.} (p-q)^2}{\operatorname{cof.} (p-q)^2} - 4$ cof. q ſin. q^3 $\times \frac{dp \operatorname{fin.} (p-q)^3}{\operatorname{cof.} (p-q)^3} +$ ſin. $q^4 . \times \frac{dp \operatorname{fin.} (p \mp q)^4}{\operatorname{cof.} (p-q)^4}$ $= dp\,($cof. $q^4 - 6$ cof. q^2 ſin. $q^2 +$ ſin. $q^4)$

$-(4 \text{ cof. } q^3 \text{ fin. } q - 4 \text{ cof. } q \text{ fin. } q^3) \times \frac{dp \text{ fin. } (p - q)}{\text{cof. } (p - q)} + (6 \text{ cof. } q^2 \text{ fin. } q^2 - 2 \text{ fin. } q^4) \times \frac{dp}{\text{cof. } (p - q)^2} - 4 \text{ cof. } q \text{ fin. } q^3 \times \frac{dp \text{ fin. } (p - q)}{\text{cof. } (p - q)^3} + \text{fin. } q^4 \times \frac{dp}{\text{cof. } (p - q)^4}.$

Les différens termes de cette quantité s'intègrent par des méthodes & des transformations analogues aux précédentes; & on trouve que l'intégrale entière de $\frac{dp \text{ cof. } p^4}{\text{cof. } (p - q)^4}$ eſt $p(\text{cof. } q^4 - 6 \text{ cof. } q^2 \text{ fin. } q^2 + \text{fin. } q^4) + (4 \text{ cof. } q^3 \text{ fin. } q - 4 \text{ cof. } q \text{ fin. } q^3) . \text{L. cof. } (p - q) + (6 \text{ cof. } q^2 \text{ fin. } q^2 - \text{fin. } q^4) \frac{\text{fin. } (p - q)}{\text{cof. } (p - q)} - \frac{2 \text{ cof. } q \text{ fin. } q^3}{\text{cof. } (p - q)^2} + \frac{\text{fin } q^4 \text{ fin. } (p - q)^3}{3 \text{ cof. } (p - q)^3}.$

Enfin les quantités $\frac{dp \text{ cof. } (p - q)^4}{\text{cof. } (p - 2q)^4}$, $\frac{dp \text{ cof. } (p - 2q)^4}{\text{cof. } (p - 3q)^4}$, &c. s'intégreront de la même manière.

VIII. Tous ces calculs étant achevés, & prenant l'intégrale $\int - S\,dp$ de manière qu'elle s'évanouiſſe lorſque $p = m$, & reçoive ſa valeur complète lorſque $p = m - q$, on trouvera différentes ſuites de termes, telles que d'une ſuite à l'autre les termes ſe détruiſent en partie. Après avoir donc effacé tous ces termes, l'équation $c \int \Pi\, dt = \frac{a N}{n} \int - S\, dp$ devient,

$$(B)\ c \int \Pi\, dt = \frac{a\,N}{u} \Big[\Big(\tfrac{1}{4} - \frac{\text{cof.}\, m^2}{2} \Big) q$$

$$+ \tfrac{1}{8} [\text{fin.}\, (2\,m - 2\,\theta\, q) - \text{fin.}\, (2\,m -$$

$$2(\theta + 1)\,q)] + \frac{2\,k\, \text{cof.}\, m^3}{3} \Big(\frac{\text{fin.}\, m}{\text{cof.}\, m} - \frac{\text{fin.}\, (m - q)}{\text{cof.}\, (m - q)} \Big)$$

$$- \frac{2\,k}{3}\, [\text{fin.}\, m - \text{fin.}\, (m - (\theta + 1)\,q)]$$

$$+ \frac{2\,k}{3} (\text{cof.}\, q^3 - 3\, \text{fin.}\, q^2\, \text{cof.}\, q)\, [\text{fin.}\, (m - q)$$

$$- \text{fin.}\, (m - (\theta + 1)\,q)] + \frac{2\,k}{3} (3\ \text{fin.}\, q$$

$$\text{cof.}\, q^2 - \text{fin.}\, q^3)\, [\text{cof.}\, (m - q) - \text{cof.}\, (m$$

$$- (\theta + 1)\,q)] - \frac{2\,k\, \text{fin.}\, q^3}{3} \Big(\frac{1}{\text{cof.}\, (m - q)}$$

$$- \frac{1}{\text{cof.}\, [m - (\theta + 1)\,q]} \Big) + 2\,k\, \text{fin.}\, q^2\ \text{cof.}\, q$$

$$\times \text{L.} \Big(\frac{[1 + \text{fin.}\, (m - q)]\, \text{cof.}\, (m - (\theta + 1)\,q)}{\text{cof.}\, (m - q)\, [1 + \text{fin.}\, (m - (\theta + 1)\,q)]} \Big)$$

$$+ \frac{k^2\, q}{4} \Big[\theta + 1 - \theta\, (\text{fin.}\, q^4 + \text{cof.}\, q^4 - 6\, \text{cof.}\, q^2$$

$$\text{fin.}\, q^2) \Big] - \frac{k^2\ \text{cof.}\, m^4}{4} \Big(\frac{\text{fin.}\, m}{\text{cof.}\, m} + \frac{\text{fin.}\, m^3}{3\ \text{cof.}\, m^3}$$

$$- \frac{\text{fin.}\, (m - q)}{\text{cof.}\, (m - q)} - \frac{\text{fin.}\, (m - q)^3}{3\, \text{cof.}\, (m - q)^3} \Big) - k^2\, (\text{cof.}\, q^3$$

$$\text{fin.}\, q - \text{cof.}\, q\ \text{fin.}\, q^3).\ \text{L.}\, \frac{\text{cof.}\, (m - q)}{\text{cof.}\, (m - (\theta + 1)\,q)}$$

$$- \frac{k^2}{4} (6\ \text{cof.}\, q^2\ \text{fin.}\, q^2 - \text{fin.}\, q^4) \Big(\frac{\text{fin.}\, (m - q)}{\text{cof.}\, (m - q)}$$

$$- \frac{\text{fin.}\, (m - (\theta + 1)\,q)}{\text{cof.}\, (m - (\theta + 1)\,q)} \Big) + \frac{k^2\ \text{cof.}\, q\ \text{fin.}\, q^3}{2}$$

Hh iij

$$\times\left(\frac{1}{\text{cof.}(m-q)^2}-\frac{1}{\text{cof.}(m-(\theta+1)q)^2}\right)-\frac{k^2}{12}$$

$$\text{fin. } q^4\left(\frac{\text{fin.}(m-q)^3}{\text{cof.}(m-q)^3}-\frac{\text{fin.}(m-(\theta+1)q)^3}{\text{cof.}(m-(\theta+1)q)^3}\right)\Big].$$

IX. Dans cette formule, $\int \Pi\, d\, t$ repréfente le poids auquel le choc de l'eau peut faire équilibre pendant le temps t que la roue emploie à parcourir l'angle q. Suppofons $\frac{\int \Pi\, d\, t}{t} = \Pi'$, Π' étant fimplement un poids, & confidérons que $t = \frac{a\, q}{u}$. De plus, imaginons qu'au moment où la première aile $E\, e$ entre dans l'eau, l'aile $A\, B$ foit placée dans la verticale ; ce qui donne $m = (\theta + 1)\, q$. En divifant le premier membre de l'équation (B) par t, le fecond par $\frac{a\, q}{u}$, & faifant $m = (\theta + 1)\, q$; on trouvera l'équation,

$$(\text{C})\ \Pi' \times c = \frac{N}{q}\Big[\left(\frac{1}{4}-\frac{\text{cof. } m^2}{2}\right)q+\frac{\text{fin. } 2\, q}{8}$$

$$+\frac{2\, k\ \text{cof. } m^3}{3}\left(\frac{\text{fin. } m}{\text{cof. } m}-\frac{\text{fin.}(m-q)}{\text{cof.}(m-q)}\right)$$

$$-\frac{2\, k\ \text{fin. } m}{3}+\frac{2\, k}{3}(\text{cof. } q^3-3\ \text{fin. } q^2\ \text{cof. } q)$$

$$\text{fin.}(m-q)+\frac{2\, k}{3}(3\ \text{fin. } q\ \text{cof. } q^2-\text{fin. } q^3)$$

$$(\text{cof.}(m-q)-1)-\frac{2\, k\ \text{fin. } q^3\,[1-\text{cof.}(m-q)]}{3\ \text{cof.}(m-q)}$$

$$+2\, k\ \text{fin. } q^2\ \text{cof. } q.\ \text{L.}\frac{1+\text{fin.}(m-q)}{\text{cof.}(m-q)}+\frac{k^2\, q}{4}\times$$

$$[\theta + 1 - \theta(\text{ſin. } q^4 + \text{coſ. } q^4 - 6 \text{ coſ. } q^2 \text{ ſin. } q^2)] - \frac{k^2 \text{ coſ. } m^4}{4} \left(\frac{\text{ſin. } m}{\text{coſ. } m} + \frac{\text{ſin. } m^3}{3 \text{ coſ. } m^3} - \frac{\text{ſin. } (m-q)}{\text{coſ. } (m-q)} - \frac{\text{ſin. } (m-q)^3}{3 \text{ coſ. } (m-q)^3} \right) - k \times$$

$$(\text{coſ. } q^3 \text{ ſin. } q - \text{coſ. } q \text{ ſin. } q^3) . \text{L. coſ. } (m-q) - \frac{k^2}{4} (6 \text{ coſ. } q^2 \text{ ſin. } q^2 - \text{ſin. } q^4) \frac{\text{ſin. } (m-q)}{\text{coſ. } (m-q)} + \frac{k^2 \text{ coſ. } q \text{ ſin. } q^3 \text{ ſin. } (m-q)^2}{2 \text{ coſ. } (m-q)^2} - \frac{k^2 \text{ ſin. } q^4 \text{ ſin. } (m-q)^3}{12 \text{ coſ. } (m-q)^3}].$$

(376.) COROLLAIRE. Pour faire une application fort ſimple de cette formule, ſuppoſons que la roue tourne avec une vîteſſe qu'on puiſſe regarder comme infiniment petite par rapport à celle du fluide. On aura en conſéquence $k = 0$, & l'équation (C) deviendra

$$\Pi' \times c = N \left(\frac{1}{4} - \frac{\text{coſ. } m^2}{2} \right) + \frac{N \text{ ſin. } 2q}{8q}.$$

Donc ſi l'on veut que le moment de l'impulſion de l'eau ſoit un *maximum*, on aura, en faiſant varier q ſeulement, $2 q d q \text{ coſ. } 2q - d q \text{ ſin. } 2q = 0$, ou bien, $2q \sqrt{[1 - (\text{ſin. } 2q)^2]} - \text{ſin. } 2q = 0$; équation à laquelle on ſatisfait en ſuppoſant $q = 0$. D'où il ſuit que le nombre des aubes doit être infini, comme on l'a trouvé dans l'article 364.

Nous avons déjà remarqué que cette concluſion

ne d it pas être admise en rigueur. L'expérience fait voir qu'après avoir augmenté le nombre des aubes jusqu'à un certain point, on ne gagne plus guère à l'augmenter davantage ; sans compter les autres inconvéniens qu'un trop grand nombre d'aubes peut occasionner.

(377.) *REMARQUE. I.* Il n'est pas facile de trouver directement, par notre formule générale, le nombre le plus avantageux d'aubes pour une roue qui tourne avec une vîtesse finie & comparable à celle du fluide, parce que l'équation du *maximum* est extrêmement composée & presque intraitable ; mais on peut parvenir au même but d'une manière indirecte, qui consiste à chercher, par la même formule, les momens d'impulsion pour différens nombres d'aubes, & à choisir parmi tous ces nombres celui qui donne le plus grand moment. On sent par l'analogie des choses & par la loi de continuité, qu'à mesure que la roue tourne plus lentement, il lui faut un plus grand nombre d'aubes.

(378.) *REMARQUE II.* Avant que de fixer dans la pratique le nombre des aubes d'une roue, il faut faire encore une observation essentielle. Les aubes AB, Oo, Pp, Qq, &c, qui sont placées en-delà de la verticale CI, tendent à pousser le fluide, qui a perdu par le choc une partie considérable de la vîtesse qu'il avoit au-devant de la roue. Par conséquent, s'il ne lui

reſte plus aſſez de vîteſſe pour ſe ſouſtraire au choc des aubes dont on vient de parler, il en réſultera une perte de mouvement dans la machine. Le moment d'impulſion des mêmes aubes contre le fluide, eſt exprimé par une quantité analogue à celle des N.os VIII & IX de l'article 375. On voit donc que dans ce cas les mêmes moyens qui augmentent le moment d'impulſion du fluide antérieur à la roue, augmentent la réſiſtance du fluide poſtérieur. Alors il ne faut pas trop multiplier le nombre des aubes. C'eſt ce qu'on pratique avec raiſon dans les roues placées ſur des rivières. Souvent même on diminue trop le nombre des aubes. Les roues qui ſe meuvent dans des courſiers demandent un aſſez grand nombre d'aubes, principalement lorſqu'on a l'attention, comme cela ſe pratique d'ordinaire, de donner un peu en-delà de la verticale *CI* une chute à l'eau pour lui faciliter le moyen de s'échapper, & de ne point gêner le mouvement de la roue.

(379.) Problème II. *Étant donné le nombre des aubes de la roue, trouver la vîteſſe* u *avec laquelle la circonférence* SBDK *doit tourner, pour que l'effet de la machine ſoit un* maximum!

Ayant multiplié le premier membre de l'équation (C) par v, vîteſſe du fardeau Π qui, par ſa quantité de mouvement repréſente l'effet de la machine; & le ſecond par $\frac{c\,u}{a}$ quantité

égale à v, & de plus ayant chaſſé k par le moyen de ſa valeur $\frac{u}{V}$; on aura une équation de cette forme,

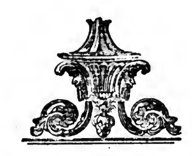
$$\Pi' v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

A, B, C étant des coéfficiens conſtans & donnés, mais qui ſont différens, ſelon que le nombre des aubes eſt plus ou moins grand. Donc pour que l'effet de la machine devienne un *maximum*, il faut que l'on ait

$$A du + 2 B u du + 3 C u^2 du = 0;$$

& par conſéquent,

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3 A.C)}}{3 C}.$$



CHAPITRE XVI.

Des Roues horizontales mues par le choc de l'eau.

(380.) SI dans les deux chapitres précédens, au lieu de regarder la roue comme verticale, on supposoit qu'elle fût horizontale & conduite par un courant horizontal qui pût frapper librement ses aubes d'un seul côté du centre, les résultats seroient toujours les mêmes ; mais on sent qu'une telle disposition a plusieurs inconvéniens qui ne permettent guère de l'employer. Ordinairement la roue, toujours supposée horizontale, est conduite par un courant incliné, qui tombant d'une certaine hauteur, vient frapper successivement ses aubes ; & pour que le choc se fasse avec avantage, les aubes, en même temps qu'elles sont dirigées au centre de la roue, ont une certaine inclinaison par rapport à son plan. Telle est la roue $BHKL$ (*Fig. 61*), dont le plan est horizontal, & l'arbre CD est par conséquent vertical. Chaque aube OO, dirigée au centre C, est inclinée à l'horizon, & reçoit le choc d'un courant d'eau PQM, au moment que sa ligne de milieu AB se trouve dans la perpendiculaire CQ menée du centre C à la direction PQ du courant. Les deux angles PQe, PQf sont les angles de Fig. 61.

ſuite, formés par le plan de l'aile *OO* avec la direction du fluide. Le poids π attaché à l'extrémité d'une corde qui va s'envelopper autour de l'arbre *CD*, repréſente, par ſa quantité de mouvement aſcenſionnel, l'effet de la machine.

Je conſidérerai toujours, pour abréger les calculs, chaque aube comme un petit rectangle dont tous les points peuvent être cenſés avoir la même vîteſſe de rotation que le point *Q*, centre d'impulſion du fluide.

(381.) On voit aſſez qu'il eſt à propos de donner un grand nombre d'aubes à ces ſortes de roues, afin que les chocs du fluide ſe ſuccèdent les uns aux autres ſans interruption. Car la peſanteur du fardeau π que la roue eſt cenſée élever, travaille continuellement en ſens contraire; & les coups que cette force donne doivent être contre-balancés par ceux du fluide. Il faut éviter néanmoins de multiplier les aubes au point de rendre la roue trop maſſive.

(382.) PROBLÈME I. *Déterminer en général l'effet de la roue horizontale* BHKL, *mue par le courant* PQM *qui vient frapper ſes aubes* OO*!*

Fig. 62. Soient (*Fig. 62*), *ef* le plan de l'aube choquée; *PQM* la direction du fluide; *QM* l'expreſſion de ſa vîteſſe; *QF* celle de la vîteſſe horizontale avec laquelle le point *Q* de la roue ou de l'aube tourne uniformément à l'inſtant du choc. Je décompoſe la vîteſſe *QM* en deux autres

$Q F$, $Q G$, dont la première eſt la même que celle du point Q de la roue, & doit être négligée; la ſeconde, la ſeule à laquelle il faille avoir égard, produit le même effet que ſi l'aube $e f$ étant en repos, le fluide la frappoit avec cette vîteſſe $Q G$. Ainſi, en nommant n le coéfficient de la percuſſion; B la ſurface de l'aube choquée $e f$; R le rayon ou ſinus total; la percuſſion qui réſultera au point Q, perpendiculairement à $e f$, ſera exprimée par $\frac{n \times B \times (Q\ G)^2 \times (\text{ſin. } G\ Q\ e)^2}{R^2}$. Repréſentons cette force par $Q\ R$ perpendiculaire à ef, & décompoſons-là en deux autres forces $Q\ S$, $Q\ R$, l'une horizontale, l'autre verticale: il eſt clair que la force verticale $Q\ T$ eſt détruite par le plan de la roue qui conſerve toujours la poſition horizontale; & que la force horizontale $Q\ S$ eſt la ſeule qui à chaque inſtant pouſſe l'aube & contre-balance le poids π. Or, Force $Q S$ = Force $Q R \times \frac{\text{ſin. } R\ Q\ T}{R}$. Donc, en ſubſtituant pour Force $Q R$, ſa valeur que nous avons trouvée; & obſervant que ſi l'on prolonge $F Q$ vers Z, les deux angles $R Q T$, $e Q Z$ ſont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; le moment de la force $Q S$, par rapport au centre C de la roue (*Fig. 61*), ſera $n \times B \times (Q\ G)^2$ $\times \frac{(\text{ſin. } G\ Q\ e)^2 \times (\text{ſin. } e\ Q\ Z) \times C\ Q}{R^2}$; moment qui Fig. 61.

doit être égal à celui $\Pi\, c$ du poids Π, c étant le bras de levier de ce poids.

Nommons a le rayon CQ de la roue ; u sa vîtesse horizontale QF ; v la vîtesse ascensionnelle du poids Π : nous aurons, en mettant pour c sa valeur $\frac{av}{u}$,

$$(A) \quad \Pi v = \frac{n \times B \times (QG)^2 \times (\text{sin.}\, GQe)^2 \times (\text{sin.}\, eQZ) \times u}{R^2};$$

équation qui remplit l'objet demandé, & qui va nous servir à plusieurs usages.

(383.) Problème II. *La vîtesse* u *de la roue étant donnée, de même que celle du fluide ; trouver la position que l'aube* e f *doit avoir, pour que l'effet de la machine soit un* maximum !

Fig. 62. Puisque dans le triangle FQM (*Fig.* 62), les côtés QF, QM & l'angle compris FQM sont donnés, la vîtesse FM ou QG est donnée. On connoît aussi l'angle GQZ que fait GQ avec la ligne horizontale FQZ. Il n'y a donc d'indéterminées dans le second membre de l'équation (A) que $(\text{sin.}\, GQe)^2$ & $\text{sin.}\, eQZ$; & on voit que la question est de partager un angle donné GQZ en deux autres angles GQe, eQZ, tels qu'en multipliant le quarré du sinus de l'un, par le sinus de l'autre, le produit $(\text{sin.}\, GQe)^2 \times (\text{sin.}\, eQZ)$ soit un *maximum*.

Soient le sinus total $= 1$; l'angle donné $GQZ = m$; l'angle $GQe = z$, & par conséquent, l'angle $eQZ = m - z$. Nous aurons

donc, $(\text{fin.}\, z)^2 \times [\text{fin.}\, (m - z)] = maximum$; ce qui eſt un problème réel, puiſque cette expreſſion s'évanouit également, ſoit qu'on faſſe $z = 0$, ou $z = m$, & qu'entre ces deux limites elle a une valeur finie. Ainſi, $2\, \text{fin.}\, z \,.\, \text{coſ.}\, z \times \text{fin.}\, (m - z) \,.\, dz - (\text{fin.}\, z)^2 \,.\, \text{coſ.}\, (m - z) \,.\, dz = 0$. La valeur $\text{fin.}\, z = 0$, répond à une eſpèce de *minimum*. L'équation du *maximum* eſt, $2\, \text{coſ.}\, z\, \text{fin.}\, (m - z) - \text{fin.}\, z \,.\, \text{coſ.}\, (m - z) = 0$; ou, $2\, \text{fin.}\, m \,.\, (\text{coſ.}\, z)^2 - 2\, \text{coſ.}\, m \,.\, \text{fin.}\, z \,.\, \text{coſ.}\, z - \text{coſ.}\, m \,.\, \text{fin.}\, z \,.\, \text{coſ.}\, z - \text{fin.}\, m \,.\, (\text{fin.}\, z)^2 = 0$; ou, $\frac{\text{fin.}\, m}{\text{coſ.}\, m} = \frac{\text{fin.}\, 2\, z}{\frac{1}{3} + \text{coſ.}\, 2\, z}$; d'où ſuit cette conſtruction.

Du point Q pour centre, avec le rayon arbitraire QX pris pour l'unité ou pour le ſinus total, décrivez la demi-circonférence XYL, terminée par le diamètre XL, qui tombe ſur le côté GQ de l'angle propoſé GQZ; prenez $QK = \frac{QX}{3}$; menez parallèlement à l'autre côté QZ de l'angle GQZ ou XQY, la droite KI; tirez le rayon QI, & partagez l'angle IQX en deux parties égales par le rayon QN: l'aube ef doit tomber ſur ce rayon. Car, ſi des points Y & I vous abaiſſés ſur le diamètre XL les perpendiculaires YE, IH, vous aurez (à cauſe des triangles ſemblables QEY, KHI), $\frac{YE}{QE} = \frac{IH}{KH}$,

$$\text{ou} \quad \frac{\text{fin.}\, YQL}{\text{coſ.}\, YQL} = \frac{\text{fin.}\, IQL}{\text{coſ.}\, IQL - \frac{QL}{3}}.$$

Or, l'angle YQL étant le supplément de l'angle YQX ou de l'angle m, on a sin. $YQL =$ sin. m; cos. $YQL = -$ cos. m; $\frac{\text{sin. } YQL}{\text{cos. } YQL} = - \frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m}$; & l'angle IQL étant le supplément de l'angle IQX que je nomme y, on a sin. $IQL =$ sin. y; cos. $IQL = -$ cos. y;

$$\frac{\text{sin. } IQL}{\text{cos. } IQL - \frac{QL}{3}} = \frac{-\text{sin. } y}{\frac{1}{3} + \text{cos. } y}.$$

Donc, on aura $\frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m} = \frac{\text{sin. } y}{\frac{1}{3} + \text{cos. } y}$; & par conséquent, en faisant l'angle $z = \frac{y}{2}$, ou $2z = y$, on aura $\frac{\text{sin. } m}{\text{cos. } m} = \frac{\text{sin. } 2z}{\frac{1}{3} + \text{cos. } 2z}$; ce qui exprime la condition du *maximum*.

(384.) *REMARQUE.* Nous remarquerons en passant, que la même méthode peut servir à déterminer l'angle le plus avantageux que les ailes d'un moulin à vent doivent faire avec l'axe, en considérant ces ailes comme des rectangles infiniment étroits, posés obliquement & alternativement en sens contraire tout autour de l'arbre, de telle manière que l'impulsion horizontale du vent puisse se décomposer en deux forces, l'une parallèle à l'arbre, qui est détruite ; l'autre, située dans un plan perpendiculaire à l'arbre, laquelle fait tourner la machine. Comme ce problème demanderoit de longues

longues discussions, pour être traité avec exactitude ; je renvoie, sur ce sujet, au *Traité des réflexions* de M. Maclaurin ; à celui des *fluides* de M. d'Alembert & au tome V de ses *Opuscules Mathématiques ;* sur-tout à un excellent Mémoire de M. Euler *(Acad. de Péterſbourg, an. 1752).*

(385.) PROBLÈME III. *La vîteſſe du fluide & la poſition de l'aile* ef, *étant données : trouver la vîteſſe horizontale* u *que la roue doit avoir, pour que l'effet de la machine ſoit un* maximum !

On voit qu'ici tout eſt donné dans le ſecond membre de l'équation (A), à l'exception des quantités QG, ſin. GQe, & u. Il s'agit donc de faire en ſorte que le produit $(QG)^2 \times$ (ſin. $GQe)^2 \times u$ ſoit un *maximum.*

Pour cela, j'obſerve d'abord que la vîteſſe QF, variable en quantité, conſervant toujours la même direction, tous les lieux des points G ſont placés ſur la droite horizontale Gm, qui rencontre en m le prolongement de l'aube fe. Il eſt clair que dans le triangle QMm, tout eſt donné, puiſque l'on connoît le côté QM qui exprime la vîteſſe du fluide, & les deux angles MQm, QMm. Menons, du point G, la perpendiculaire Gh ſur Qm ; & nommons 1 le ſinus total : on aura, ſin. $GQe = \frac{Gh}{QG}$. Donc, au lieu du produit $(QG)^2 \times$ (ſin. $GQe)^2 \times u$, nous aurons, $(Gh)^2 \times GM =$ *maximum ;* &

comme la ligne Gh eſt en rapport conſtant avec Gm, il s'enſuit que $(Gh)^2 \times GM$ ſera un *maximum*, lorſque $(Gm)^2 \times GM$ en ſera un. Or, pour que ce dernier cas arrive, il faut que MG ſoit le tiers de Mm. D'où ſuit cette conſtruction.

Prenez ſur la ligne donnée Mm la partie $MG = \frac{Mm}{3}$; menez GQ & achevez le parallélogramme $QGMF$: le côté QF exprime la vîteſſe que le point Q doit avoir. Connoiſſant cette vîteſſe, on la ſubſtituera dans l'équation (A), & on aura le plus grand effet Πv de la machine.

(386.) PROBLÈME IV. *La vîteſſe du courant étant toujours donnée, déterminer tout-à-la-fois l'angle que l'aube* e f *doit former avec le courant, & la vîteſſe que le point* Q *doit prendre, afin que l'effet de la machine ſoit un* maximum !

On voit par l'équation (A) que dans l'hypothèſe préſente, le produit $(QG)^2 \times (\text{ſin } GQe)^2 \times (\text{ſin. } eQZ) \times u$, le ſeul où il entre des facteurs variables, doit être un *maximum*. Il faut donc, après avoir exprimé tous les facteurs de ce produit par le moyen de l'angle PQf & de la vîteſſe QF, prendre ſa différentielle en faiſant varier ces deux quantités, & égaler ſéparément à zéro les deux parties de cette différentielle.

Soient:
- la viteſſe donnée QM du fluide..... $= V$,
- la viteſſe QF du point Q.......... $= u$,
- le ſinus total.................... $= 1$,
- l'angle donné PQZ ou QMm, que fait la direction du courant avec l'horizon.................. $= k$,
- l'angle PQf ou MQe.......... $= p$.

En menant Gg perpendiculaire à QM, on aura $Gg = u$ ſin. k; $Mg = u$ coſ. k; $Qg = V - u$ coſ. k; ſin. $MQG = \frac{Gg}{QG} = \frac{u \text{ ſin. } k}{QG}$; coſ. $MQG = \frac{Qg}{QG} = \frac{V - u \text{ coſ. } k}{QG}$. Donc, ſin. $GQe =$ ſin. $(MQm - MQG) =$ ſin. $MQm \times$ coſ. $MQG -$ coſ. MQm . ſin. $MQG = \frac{\text{ſin. } p \cdot (V - u \text{ coſ. } k) - \text{coſ. } p \cdot u \text{ ſin. } k}{QG} = \frac{V \text{ ſin. } p - u \text{ ſin. } (p + k)}{QG}$; & $(QG)^2 \times (\text{ſin. } GQe)^2 = [V \text{ ſin. } p - u \text{ ſin. } (p + k)]^2$. De plus, ſin. $eQZ =$ ſin. $(PQm - PQZ) =$ ſin. $(180^d - p - k) =$ ſin. $(p + k)$. Ainſi, le produit $(QG)^2 \times (\text{ſin. } GQe)^2 \times (\text{ſin. } eQZ) \times u$, deviendra $[V \text{ ſin. } p - u \text{ ſin. } (p + k)]^2 \times [\text{ſin. } (p + k)] \times u =$ *Maximum*. Différenciant donc, ſuivant p & u, & égalant à zéro les deux parties de la différentielle,

on aura les deux équations :

(B) $[2 V \text{cos.} p - 2 u \text{cos.} (p + k)] \times [V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)] \times [\text{sin.} (p + k)] + [V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)]^2 \times [\text{cos.} (p + k)] = 0$;

(C) $-2 [V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)] \times u \text{sin.} (p + k) + [V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)]^2 = 0$.

Cela posé, j'observe que dans l'équation (C), relative à la variation de u, le facteur $[V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)]$ doit être rejeté ; car, si on prenoit $V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k) = 0$; ou, $V \text{sin.} p = u \text{sin.} (p + k)$, ou, $V : u :: \text{sin.} (p + k) : \text{sin.} p$; il est aisé de voir que la direction de la vîtesse QG tomberoit sur l'aube fe, & que par conséquent il n'y auroit point de choc. L'équation qui donne la vîtesse u la plus avantageuse, est donc, $- 2 u \text{sin.} (p + k) + V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)$; ou bien,

$$u = \frac{V \text{sin.} p}{3 \text{sin.} (p + k)}.$$

Dans l'équation (B), relative à la variation de l'angle p, le facteur $V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k)$ doit être aussi rejeté ; car, si l'on supposoit $V \text{sin.} p - u \text{sin.} (p + k) = 0$, & que l'on mît, dans cette équation, pour u sa valeur $\frac{V \text{sin.} p}{3 \text{sin.} (p + k)}$, on trouveroit $V \text{sin.} p - \frac{V \text{sin.} p}{3} = 0$, ce

qui eſt impoſſible. L'équation pour l'angle p le plus avantageux eſt donc,

$[2 V \text{cof.} p - 2 u \text{cof.} (p + k)] \times [\text{fin.} (p + k)] + V \text{fin.} p . [\text{cof.} (p + k)] - u \text{fin.} (p + k) . [\text{cof.} (p + k)] = 0.$

Subſtituant dans cette formule, pour u ſa valeur $\frac{V \text{fin.} p}{3 \text{fin.} (p + k)}$, elle deviendra ſimplement, $2 \text{cof.} p . \text{fin.} (p + k) = 0$; ce qui donne, ou $\text{fin.} (p + k) = 0$, ou $\text{cof.} p = 0$. La première ſuppoſition feroit tomber l'aube ef dans la direction horizontale, & donneroit pour u une valeur infinie, ce qui eſt impoſſible. La vraie équation de l'angle p le plus avantageux, eſt donc, $\text{cof.} p = 0$; d'où nous voyons que cet angle doit être droit, ou que *l'aube* e f *doit être perpendiculaire à la direction* P Q *du courant.*

Subſtituons maintenant dans l'équation

$$u = \frac{V \text{fin.} p}{3 \text{fin.} (p + k)},$$

pour $\text{fin.} p$ ſa valeur 1, & pour $\text{fin.} (p + k)$ ſa valeur $\text{cof.} k$, nous aurons $u = \frac{V}{3 \text{cof.} k}$; c'eſt-à-dire que, *la vîteſſe* u *la plus avantageuſe doit être égale à la vîteſſe* V *du fluide, diviſée par le triple du coſinus de l'angle que la direction du fluide fait avec l'horizon.*

Connoiſſant p & u, ſi l'on ſubſtitue leurs valeurs dans l'équation (A), on aura l'expreſſion du plus grand effet de la machine.

CHAPITRE XVII.

Des Roues mues par le poids de l'eau.

(387.) LES roues mues par le poids de l'eau, dont il eſt ici queſtion, & qu'on appelle ordinairement *roues à pots* ou *à augets*, ſont des roues
Fig. 63 & 64. verticales *AOBD* (*Fig. 63 & 64*), qui reçoivent, dans des eſpèces de *pots* ou d'*augets mnnm* fixés à leurs bords, l'eau d'un canal *XZ*, & qui tournent en vertu de l'effort que cette eau exerce par ſa peſanteur. A cet effort, s'ajoute celui du choc, quand l'eau arrive aux augets avec une vîteſſe plus grande que celle de la roue. On voit que, ſelon la manière de recevoir l'eau, la roue peut tourner de gauche à droite (*Fig. 63*), ou de droite à gauche (*Fig. 64*). Les augets ſe rempliſſent vers la partie ſupérieure de la roue, & ne commencent à ſe vider que lorſqu'en tournant ils commencent à s'incliner en contre-bas. On doit s'attacher à leur donner la forme & les dimenſions les plus propres à leur faire conſerver l'eau autant qu'il eſt poſſible.

Nous eſtimons toujours l'effet de la machine, par le mouvement aſcenſionnel d'un poids Π, attaché à l'extrémité d'une corde qui, au moyen de la poulie *S* de renvoi, va s'envelopper autour de l'arbre de la roue.

(388.) Il eſt évident que, toutes choſes

d'ailleurs égales, plus l'endroit où l'eau entre dans les augets est proche de l'extrémité supérieure A du diamètre vertical AB, plus la roue porte d'eau, & plus par conséquent elle a de force pour tourner. Mais on n'est pas toujours maître de lui procurer cet avantage; car il arrive souvent que la hauteur de l'extrémité Z du canal affluant, au-dessus du point le plus bas du terrein, est trop petite pour permettre d'y placer une roue d'un diamètre convenable à l'effet qu'elle doit produire. Alors on reçoit l'eau en avant de la roue, comme dans la *Figure 64*; ayant soin de donner aux augets la forme la plus propre à bien tenir l'eau, suivant l'exigence des cas : on augmente leur capacité, en augmentant la largeur de la roue; mais cela a quelquefois l'inconvénient de rendre la roue trop pesante.

(389.) Que l'eau entre dans les augets par le haut de la roue, ou par le côté; le mouvement s'engendre toujours de la même manière. Il s'accélère par degrés dans les premiers instans; bientôt il parvient à l'uniformité; & alors l'action de l'eau contre-balance à chaque instant celle du poids Π. Or, il peut arriver deux cas : ou la vîtesse de l'eau, à l'endroit où elle entre dans un auget, est égale à la vîtesse de rotation de cet auget, prise à son milieu; ou elle est plus grande. Dans le premier cas, l'eau agit simplement par son poids, pour faire tourner la roue : dans le second, elle agit tout-à-la-fois par son poids

& par le choc. Je ne dis rien d'un troisième cas où l'on supposeroit que la vîtesse de rotation de l'auget, seroit plus grande que celle de l'eau du canal affluent : car si cela arrivoit, la cause en seroit la pesanteur de l'eau déposée dans l'auget, laquelle force tend effectivement à accélérer le mouvement ; mais comme cette eau ne peut être remplacée que par le canal affluent, & que son action est limitée, on sent qu'elle produiroit d'autant moins d'effet sur la machine, qu'elle prendroit pour elle-même plus de vîtesse. On verra en effet bientôt qu'il convient de faire tourner la roue le plus lentement qu'il est possible. Il n'est donc ici question que des deux premiers cas. De plus, il s'agit seulement en ce moment d'évaluer l'effort que l'eau contenue dans les augets, exerce à chaque instant, par la pesanteur, contre le poids π : l'effet du choc, quand il a lieu, s'évalue par les principes du *Chap. XIII.*

(390.) Supposons donc que la roue tourne avec une vîtesse uniforme. Quelle que soit cette vîtesse, la pesanteur de l'eau contenue dans les augets, agit de la même manière que si la roue étoit en repos. D'un autre côté, il est évident qu'on peut toujours ramener cet effort de l'eau, à celui d'une portion de couronne d'eau $GghH$

Fig. 65. (*Fig. 65*)., continuellement inhérente à la roue, sur une étendue donnée GOH, & sur une épaisseur, Gg aussi donnée. Les dimensions de cette portion de couronne se trouvent par la

forme des augets, & par la quantité d'eau qu'ils contiennent. Ordinairement, l'épaisseur Gg peut être regardée comme infiniment petite par rapport au rayon CG de la roue; & la vîtesse de rotation du point G ou de tout autre point de la circonférence $AOBD$, comme celle de l'auget. Si on trouvoit cette suppposition trop libre, on approcheroit davantage de la vérité, en prenant, au lieu de l'arc GOH, l'arc moyen de la portion de couronne; & au lieu du rayon CG, le rayon moyen. Mais nous négligeons ici cette grande exactitude, & nous nous proposons ainsi la question.

(391.) PROBLÈME I. *Déterminer le moment de l'effort que la portion d'eau* GghH, *dont l'épaisseur* Gg *est infiniment petite par rapport au rayon* CG, *exerce à chaque instant pour accélérer le mouvement de la roue !*

Du centre C, soient menés les deux rayons infiniment voisins CMN, Cmn, lesquels déterminent la quantité élémentaire d'eau $MNnm$; & des points G, H, M, m, soient menées, au diamètre vertical AB, les perpendiculaires GF, HV, MP, mp. Soit encore abaissée la verticale mrz, qui rencontre en r l'ordonnée mp, & en z le rayon horizontal CO. La portion d'eau $MNnm$ peut être représentée par $Mm \times MN$; & son moment par rapport au centre C, par $Mm \times MN \times Cz$, ou $Mm \times MN \times MP$. Or, à cause des triangles semblables Mrm, MPC, on

a, $Mm : CM :: Mr$ ou $Pp : MP$; & par conféquent $Mm \times MP = Pp \times CM$. Donc, $Mm \times MN \times MP = MN \times Pp \times CM$; & $\int Mm \times MN \times MP = \int MN \times Pp \times CM$ $= MN \times CM \times \int Pp = MN \times CM \times$ FV: expreffion du moment de la quantité totale d'eau $GghH$.

Comme dans ce calcul, nous avons fait abftraction de la largeur de la roue, ou de la dimenfion horizontale des augets; fi l'on nomme D cette dimenfion, la véritable expreffion du moment de l'eau $GghH$, fera $D \times MN \times FV \times CM$. Pour abréger, au lieu du produit $D \times MN$, qui repréfente une furface rectangulaire, j'emploîrai une fimple lettre B.

(392.) COROLLAIRE. Nommons u la vîteffe de rotation du point G; a le rayon CM; v la vîteffe afcenfionnelle du poids Π; c le bras de levier de ce poids par rapport au centre de la roue. On aura d'abord; $\Pi \times c = B \times FV \times a$. Subftituons dans cette équation pour c fa valeur $\frac{av}{u}$: nous aurons, $\Pi v = B \times FV \times u$.

(393.) PROBLÈME II. *La roue tournant toujours uniformément, & la vîteffe du point* G *étant fuppofée égale à celle de l'eau du canal, à l'endroit* Gg *où elle paffe de ce canal dans les augets :*

rendre l'effet Πv *de la machine le plus grand qu'il est possible !*

Je suppose que le canal affluent amène, en temps égaux, des quantités égales d'eau à la roue. Soit RZ une ligne constante de niveau ; & RF la hauteur dûe à la vîtesse V de l'eau à son entrée Gg dans les augets. On doit ici considérer Gg comme un orifice dont la surface est B, & par lequel passe, dans un temps donné, une quantité donnée d'eau. Supposons que dans une seconde, il passe par B, une quantité d'eau $= Q$; & que les corps graves parcourent quinze pieds pendant la première seconde de leur chute. En nommant H la hauteur RF, on aura (201), $Q = 2B\sqrt{15H}$, ou $B = \frac{Q}{2\sqrt{15H}}$; & par conséquent, $\Pi v = \frac{Q}{2\sqrt{15H}} \times FV \times V$; ou bien (en nommant g la gravité ; k la hauteur dûe à la vîtesse v ; & observant que $V^2 = 2gH$, $v^2 = 2gk$), $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$.

Maintenant, tout étant donné dans le second membre de cette équation, excepté la ligne FV qu'on peut faire varier, on voit que pour augmenter l'effet de la machine, il faut augmenter FV. Or, le point V étant supposé fixe, à mesure qu'on augmente VF, on diminue FR, & par conséquent aussi la vîtesse du fluide à l'endroit Gg, ou la vîtesse de rotation du point G.

Et il est clair que cette diminution de vîtesse peut avoir lieu, Q demeurant constante, puisqu'on peut augmenter en proportion la surface B, ou le produit $D \times MN$, dont les deux facteurs sont susceptibles de variation. La variation de MN ne peut être que très-petite; mais on est libre d'augmenter D, en augmentant pour cela la largeur de la roue.

Concluons-donc que *la circonférence de la roue tournant uniformément, avec une vîtesse égale à celle du fluide à son entrée dans les augets, l'effet de la machine, pour une quantité constante d'eau dépensée, sera d'autant plus grand que la roue tournera avec plus de lenteur.*

(394.) COROLLAIRE. En comparant l'expression $\pi \sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$ de l'effet de la roue à pots, rendu le plus grand qu'il est possible, avec les expressions que nous avons trouvées (368) pour les plus grands effets des roues à aubes, on jugera quelle est celle qui produit le plus grand effet, pour une égale quantité d'eau dépensée, ou de la roue à pots, ou de la roue à aubes. Car, supposons qu'ici, & dans l'article 368, les quantités d'eau Q dépensées en une seconde soient les mêmes; de plus, en imaginant que la roue $ADBO$ fût ici mue par le choc de l'eau, supposons que ce choc répondît à l'endroit V: la lettre H, qui, dans l'article 368, exprime la hauteur dûe à la vîtesse du courant,

repréſentera ici RV. Donc, l'effet de la roue à pots eſt au plus grand effet de la roue à aubes (I.er Cas), comme $\frac{Q.FV}{2\sqrt{15}}$ eſt à $\frac{2\,Q.RV}{27\sqrt{15}}$, ou comme $27\,FV$ eſt à $4\,RV$; & l'effet de la roue à pots eſt au plus grand effet de la roue à aubes (II.e Cas) comme $27\,FV$ eſt à $8\,RV$.

Comme on eſt maître, & qu'il convient d'augmenter VF (le point V étant fixe), pour augmenter l'effet de la roue à pots, on voit que pour une quantité égale d'eau dépenſée, l'effet de la roue à pots eſt beaucoup plus avantageux que celui de la roue à aubes. Les roues de la première eſpèce doivent donc être préférées aux autres, toutes les fois que la choſe eſt poſſible. Mais, il y a beaucoup de cas où elle ne l'eſt pas; car d'abord, ſur les rivières on ne peut employer que des roues à aubes. De plus, pour les courſiers, les roues à pots demandent une grande chute d'eau, qu'on ne peut pas ſouvent ſe procurer : alors l'on emploie des aubes que le fluide vient frapper au bas de la roue. Enfin, il y a des occaſions où l'on a beſoin que la roue tourne très-vîte, & où l'on a d'ailleurs de l'eau en abondance : on remplit cet objet avec une roue à aubes. Comme les roues à pots produiſent d'autant plus d'effet qu'elles tournent plus lentement, on ne pourroit en ce cas, employer une roue de cette eſpèce, qu'en la faiſant engréner avec une lanterne, ou avec une autre roue; ce

qui compliqueroit la machine & augmenteroit les frottemens.

(395.) PROBLÈME III. *Le point* G *de la roue tournant toujours uniformément, avec une vîtesse égale à celle du fluide à son entrée* G g *dans les augets, on suppose maintenant que le niveau* X Z *du réservoir pouvant toujours demeurer le même, au moyen de l'affluence d'une rivière ou d'un ruisseau, qui remplace suffisamment l'eau dépensée par la roue, on soit maître d'augmenter ou de diminuer* Q, *en tirant l'eau du réservoir par un tuyau de diamètre donné, & de longueur variable; & l'on demande l'endroit* G g *où il faut recevoir l'eau, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Substituons dans l'équation $\pi\sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$,

pour Q sa valeur $2B\sqrt{15H}$, ou $2B.\sqrt{15} \times \sqrt{RF}$; nous aurons $\pi\sqrt{k} = B \times FV \times \sqrt{RF} =$ *maximum*. Donc, B étant constant, la quantité $(FV)^2 \times RF$ est un *maximum*. La question est donc de diviser la ligne donnée RV, en deux parties, telles que le produit de l'une par le quarré de l'autre, soit un *maximum*. Or, il faut, pour cela, que RF soit le tiers de RV. Ainsi, l'équation du plus grand effet de la roue est, $\pi\sqrt{k} = B \times \frac{2}{3} RV \times \sqrt{\frac{RV}{3}}$: équation au moyen de laquelle on pourra comparer le plus grand effet de cette roue, à celui

d'une roue à aubes, qui feroit frappée au point V, d'où l'eau s'échappe de la roue à pots.

La folution de ce problème peut être utile, lorfqu'ayant une roue toute conftruite, on veut la faire tourner de la manière la plus avantageufe, par le feul poids de l'eau, & lorfque de plus la hauteur du réfervoir étant donnée & conftante, on a la faculté de prendre plus ou moins d'eau, felon le befoin.

(396.) PROBLÈME IV. *Suppofons que le canal affluent amène toujours, en temps égaux, des quantités égales d'eau à la roue; que cette roue tourne uniformément, mais que la vîteffe de rotation du point G foit maintenant plus petite que celle de l'eau, à fon entrée dans les augets : on demande l'expreffion générale de l'effet de la machine!*

L'action du poids Π eft ici contre-balancée à chaque inftant par celle de l'eau contenue dans les augets, & par le choc de l'eau que le canal amène continuellement. Soient V la vîteffe de ce courant; u la vîteffe de rotation du point G; a le rayon CG; c le bras de levier du poids Π; B la fection d'un auget par un plan perpendiculaire à la roue & dirigé à fon centre; C la furface contre laquelle s'exerce le choc perpendiculaire du fluide; n le coéfficient de la percuffion. On voit (339 & 392), qu'on aura l'équation,

$$\Pi c = B \times FV \times a + n.C(V - u)^2 \times a;$$

ou bien (en nommant v la vîteffe afcenfionnelle

du poids Π, & observant que $c = \frac{a\,v}{u}$),

$$(A)\ \Pi v = B \times FV \times u + n\,C\,(V - u)^2 . u.$$

Maintenant, nommons Q la quantité conſtante d'eau que le canal amène à la roue en une ſeconde; H, la hauteur FR dûe à la vîteſſe de cette eau; K, l'aire de l'orifice par lequel l'eau eſt cenſée ſortir du canal pour entrer dans les augets; h, la hauteur FT dûe à la vîteſſe u; k, la hauteur dûe à la vîteſſe v.

Il eſt évident que la vîteſſe u étant moindre que V, K doit être moindre que B; mais que la roue tournant uniformément, & que par conſéquent le fluide, depuis le réſervoir juſques à l'endroit où il s'échappe de la roue, pouvant être conſidéré comme une maſſe continue qui conſerve conſtamment les mêmes dimenſions aux mêmes endroits; il s'enſuit (193) que les vîteſſes des différentes ſections perpendiculaires de ce courant ſont entr'elles en raiſon inverſe des ſurfaces de ces mêmes ſections. Ainſi, on aura, $B : K :: V : u$; ou, $B.u = K.V$; ou, $B \sqrt{h} = K \sqrt{H}$. Mais $Q = 2\,K \sqrt{15\,H}$, ou $K \sqrt{H} = \frac{Q}{2 \sqrt{15}}$; donc $B \sqrt{h} = \frac{Q}{2 \sqrt{15}}$.

D'un autre côté, pour déterminer le coéfficient n, ou $\frac{F}{A\,U^2}$ de la percuſſion, faiſons $A = C = K$; $U = V$, & par conſéquent, la hauteur dûe à la vîteſſe $U = H$; prenons $F = m.K.H$, m étant

m étant un coéfficient conſtant qui vaut 2 à-peu-près (367). En mettant pour K ſa valeur $\frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{H}}$, on aura $F = \frac{m.H \times Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{H}}$; & $n = \frac{m}{2g.C} \times \frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{H}}$.

Par conſéquent l'équation (A) deviendra,

$$\Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \times \left(FV + \frac{m(\sqrt{H}-\sqrt{h})^2.\sqrt{h}}{\sqrt{H}}\right); \quad \text{(B)}$$

ce qui eſt la formule demandée.

(397.) PROBLÈME V. *Tout étant ſuppoſé donné dans la formule* (B), *à l'exception de la hauteur* h *dûe à la vîteſſe* u *du point* G, *on demande quelle doit être cette vîteſſe, pour que l'effet de la machine ſoit un* maximum!

Dans cette hypothèſe, $(\sqrt{H}-\sqrt{h})^2.\sqrt{h}$ doit être un *maximum*; ce qui donne $\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$, ou $u = \frac{V}{3}$. Subſtituant cette valeur de $\sqrt{h}$ dans la formule (B), & faiſant $m = 2$, on trouvera, $\Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \times \left(RV - \frac{19\,RF}{27}\right)$; expreſſion du plus grand effet de la roue.

(398.) COROLLAIRE. On voit par cette expreſſion, 1.° que la roue produit un effet qui augmente à meſure que FR diminue, RV étant donnée, & que par conſéquent la roue tourne plus lentement. On obtiendroit le même réſultat, ſi l'on différencioit le ſecond membre de la

formule (B), en faisant varier h & H, & qu'on égalât séparément à zéro les deux différentielles. Car la première équation résultante donne $\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$. Substituant cette valeur de $\sqrt{h}$ dans la seconde, on trouvera $H = 0$, & par conséquent aussi $h = 0$, ce qui étant impossible physiquement, fait voir du moins que la roue produit d'autant plus d'effet, qu'elle tourne avec plus de lenteur.

2.° Que le plus grand effet de la roue à pots, est au plus grand effet que produiroit une roue à aubes, sous la chute RV, comme $27\left(RV - \frac{19\,RF}{27}\right)$ est à $8\,RV$, la quantité d'eau Q employée à mouvoir la roue, étant la même dans les deux cas.



CHAPITRE XVIII.

Des Machines mues par la réaction de l'eau.

(399.) UN vaſe qui contient de l'eau, étant ſuppoſé ſuſpendu verticalement par ſon centre de gravité, le fluide exerce des preſſions perpendiculaires égales ſur tous les points d'une même zone, ou ſection horizontale de ce vaſe qui conſerve toujours la même ſituation d'équilibre, tant que le fluide eſt en repos. Mais ſi l'on fait aux parois une ouverture par où le fluide vienne à s'échapper, alors les parois ceſſant en cet endroit, la preſſion contre les parois y ceſſe auſſi; mais l'endroit directement oppoſé du vaſe ſouffre une preſſion qui n'étant plus contre-balancée, oblige néceſſairement le vaſe à reculer. J'appelle *réaction de l'eau*, cette force qui repouſſe ainſi le vaſe; & je me propoſe d'expliquer comment elle peut ſervir de principe moteur à une machine.

(400.) Soit *ABCDEF (Fig. 66)*, une roue horizontale, mobile autour d'un axe vertical *O*. A cette roue & à ſon arbre, ſont attachés ſolidement une ſuite de tuyaux, tels que *AH*, *EG*, *FH (Fig. 67)*. Ces tuyaux communiquent par en haut avec un tambour creux *HIHI*, Fig. 66 & 67.

qui tourne avec eux autour de l'arbre; l'eau eſt verſée d'abord dans ce tambour, par les conduits *NG* qui la tirent du réſervoir immobile *IMIM;* de-là, elle paſſe dans les tuyaux, & s'échappe vers le bas, par les orifices *a, b, c,* &c, horizontaux ou inclinés en même ſens à l'horizon; d'où réſulte contre les tuyaux une réaction, qui fait tourner la roue dans le ſens *ABCDEF.* Le mouvement s'accélère par degrés; il parvient en très-peu de temps à l'uniformité. Je le conſidère, quand il eſt arrivé à cet état; & je repréſente toujours l'effet de la machine, par le mouvement aſcenſionnel d'un poids π attaché à une corde, qui va s'envelopper autour de l'arbre *OZ.*

(401.) PROBLÈME I. *Un tuyau* CDFE

Fig. 68. (Fig. 68), *de figure quelconque, entretenu conſtamment plein d'eau au niveau* AD, *tournant uniformément autour de l'axe vertical* AB, *& laiſſant échapper l'eau par la petite ouverture latérale* I: *on demande la hauteur dûe à la vîteſſe de cet écoulement!*

Soit la courbe *hMl* l'axe du tuyau; & concevons que le fluide ſoit partagé en une infinité de tranches égales, perpendiculaires aux élémens *Mm* de la courbe, leſquelles conſervent leur parallélisme pour chaque élément, & changent de direction d'un élément à l'autre. Chaque point *M* d'une tranche quelconque, eſt continuellement ſoumis à l'action de deux forces, qui ſont la gravité & la force centrifuge. Ayant mené à l'axe *AB*, l'horizontale *MP*; faiſons paſſer par

ces deux lignes un plan dans lequel nous prendrons la verticale Mt pour repréſenter la gravité, & l'horizontale Mq pour repréſenter la force centrifuge. De ces deux forces, réſultera la force compoſée Mr, repréſentée par la diagonale du rectangle $Mtrq$. Je mène, ſuivant l'élément Mm de la courbe hMl, un plan Mmn perpendiculaire au plan APM, de ſorte que Mn eſt la projection orthogonale de Mm ſur ce dernier plan : enſuite je tire np parallèle à MP. La force Mr peut être décompoſée en deux autres Mi, Mg; l'une dirigée ſuivant Mn; l'autre perpendiculaire à Mn. Or, comme le plan $Mgrt$ eſt perpendiculaire au plan Mmn; la force Mg eſt perpendiculaire à l'élément Mm, qui eſt ſitué dans ce dernier plan, & ne contribue en rien à la vîteſſe ſuivant Mm. De la force Mi, je dérive les deux forces Mf, Mu, la première dirigée ſuivant Mm, la ſeule qui tende à accélérer la vîteſſe de l'eau dans le tuyau, la ſeconde perpendiculaire à Mm, qu'il faut négliger.

Soient
- l'horizontale donnée Bl .... $= b$,
- l'horizontale donnée Ah .... $= c$,
- la hauteur donnée AB .... $= h$,
- AP .... $= x$,
- PM .... $= y$,
- pn .... $= y + dy$,
- Mm .... $= ds$,
- l'aire de l'orifice l .... $= K$,
- l'aire de la ſection ſupérieure & perpendiculaire CD du tuyau .... $= M$.

Soient
- l'aire de la section $s M z$ perpendiculaire à $M m$ .... $= X$,
- la vîtesse avec laquelle l'eau sort par l'orifice l .... $= u$,
- la hauteur dûe à cette vîtesse .... $= r$,
- la vîtesse de l'eau suivant $M m$ ..... $= y$,
- la vîtesse absolue de rotation uniforme du point l .... $= V$,
- la hauteur dûe à cette vîtesse .... $= f$,
- le sinus total .... $= 1$,
- l'angle $m M n$ .... $= \lambda$,
- la gravité .... $= g$.

On aura d'abord, Force $M t = g$. La Force centrifuge du point l ayant, comme on sait, pour expression, le quarré de la vîtesse V, divisé par le rayon $B l$, c'est-à-dire $\frac{V^2}{b}$ ou $\frac{2 g f}{b}$, & les forces centrifuges de deux points qui tournent dans le même temps, étant proportionnelles aux rayons des circonférences qu'ils décrivent, on aura, Force $M q = \frac{2 g f}{b} \times \frac{y}{b} = \frac{2 g f y}{b^2}$. Donc, Force $M r = \sqrt{\left(g^2 + \frac{4 g^2 f^2 y^2}{b^4}\right)}$, que je nomme φ, afin d'abréger; Force $M i = \varphi$ cos. $r M i = \varphi$ cos. $(r M t - i M t) = \varphi$ cos. $r M t \times$ cos. $i M t + \varphi$ sin. $r M t \times$ sin. $i M t$. Or, cos. $r M t = \frac{g}{\varphi}$; sin. $r M t =$

$\frac{2gfy}{b^2.\varphi}$; cof. $iMt = \frac{dx}{Mn} = \frac{dx}{ds\ \text{cof.}\ \lambda}$; fin. $iMt = \frac{dy}{ds\ \text{cof.}\ \lambda}$; donc, Force $Mi = \frac{g}{\text{cof.}\ \lambda}\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)$; Force Mf = Force $Mi \times \text{cof.}\ \lambda = g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)$.

Maintenant, la vîteffe de la tranche sMz, étant exprimée par v après le temps t écoulé, elle deviendroit, après l'inftant fuivant dt, $v + g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt$, fi les tranches n'avoient point d'action les unes fur les autres: mais comme elle devient $v + dv$, on voit, par la méthode de l'article 230, que fi les tranches étoient animées de la vîteffe $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt - dv$, elles fe feroient mutuellement équilibre. D'où il fuit que, fur toute l'étendue de la courbe hMl, on a, $\int ds\left[g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right)dt - dv\right] = 0$; ou bien, $gdt \times \int dx + \frac{gfdt}{b^2}\int 2ydy - \int dsdv = 0$.

Or, en prenant toutes les intégrales pour la hauteur entière h; l'intégrale de dx eft h; celle de $2ydy$ eft $b^2 - c^2$; celle de $dsdv$, ou de $ds.d\left(\frac{Ku}{X}\right)$, ou de $\frac{Kds(Xdu - udX)}{X^2}$, eft

$$Kdu\int\frac{ds}{X} - Ku.Xds\left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}\right),$$

ou, $$Kdu\int\frac{ds}{X} - K^2u^2.dt\left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}\right),$$

à caufe de $dt = \frac{ds}{v} = \frac{Xds}{Ku}$. Par conféquent, on aura (en nommant N la quantité donnée $\int\frac{ds}{X}$),

$$gdt\left(h + \frac{f(b^2-c^2)}{b^2}\right) - N.K.du - \left(\frac{M^2-K^2}{2M^2}\right).u^2dt = 0:$$

Équation féparable, & d'où il eft facile de tirer la relation entre le temps t & la viteffe refpective u, avec laquelle l'eau fort par l'orifice l; ou entre le temps t & la hauteur r, à caufe de $u^2 = 2gr$.

(402.) COROLLAIRE I. On voit en général que la viteffe u varie d'un inftant à l'autre, & que le feul terme qui contient cette variation du dépend de la figure du tuyau. Mais, en intégrant l'équation précédente, on trouve que fi l'orifice K eft beaucoup moindre que la fection fupérieure M du tuyau, la viteffe u devient fenfiblement uniforme après les 2 ou 3 premières fecondes de l'écoulement; c'eft-à-dire, qu'après ce commencement du mouvement, inutile à confidérer, il fort, en temps égaux, des quantités égales d'eau, à très-peu de chofe près. Nous

ferons donc, dans la ſuite, $du = 0$; & alors on aura ſimplement, $g\,d\,t\left[h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)\right] - \left(\frac{M^2 - K^2}{2\,M^2}\right) u^2\,d\,t = 0$; ou, $h + \frac{f(b^2 - c^2)}{b^2} - \left(\frac{M^2 - K^2}{M^2}\right) r = 0$; ce qui donne,

$$r = \left(h + f\,\frac{(b^2 - c^2)}{b^2}\right) \times \frac{M^2}{M^2 - K^2}.$$

Mais, il ne faudra pas oublier que cette expreſſion emporte que M ſoit conſidérablement plus grand que K. La valeur de r, dans cette hypothèſe, eſt indépendante, comme on voit, de la figure du tuyau; mais on doit éviter les tuyaux tortueux, où l'eau coule avec peine, à cauſe du frottement.

(403.) COROLLAIRE II. La ſurface de l'eau à l'entrée CD du tuyau, étant ſuppoſée horizontale, le premier côté de la courbe $h\,M\,l$ eſt vertical. Or, la vîteſſe ſuivant ce côté eſt $\frac{K\,u}{M}$, tandis que la vîteſſe de rotation horizontale uniforme du point h eſt $\frac{c}{b} \times V$. Donc, la vîteſſe vraie de l'eau en h ſera $\sqrt{\left[\frac{K^2\,u^2}{M^2} + \frac{c^2\,V^2}{b^2}\right]}$, ou $\sqrt{\left[\frac{2\,g\,r\,K^2}{M^2} + \frac{2\,g\,f\,c^2}{b^2}\right]}$; & le conduit NG (*Fig. 67*), qui eſt ſubordonné à la direction de cette vîteſſe, ſera conſéquem-

ment incliné à l'horizon, sous un angle dont la tangente $= \frac{b K u}{c M . V} = \frac{b K \sqrt{r}}{c M \sqrt{f}}$.

D'un autre côté, comme la pression de l'eau contenue dans le réservoir fixe $I M I M$ doit produire la vitesse $\sqrt{\left[\frac{2 g r K^2}{M^2} + \frac{2 g f c^2}{b^2}\right]}$ à l'orifice inférieur G du conduit NG, il s'ensuit que la hauteur $Z R$ de cette eau $= \frac{r K^2}{M^2} + \frac{f c^2}{b^2}$.

(404.) COROLLAIRE III. La pression à
Fig. 68. l'endroit M du tuyau $C D F E$ (*Fig. 68*) étant la somme des forces perdues, $g\left(\frac{d x}{d s} + \frac{2 f y d y}{b^2 d s}\right) - \frac{d v}{d t}$; si l'on nomme P cette pression, on aura

$$d P = d s\left[g\left(\frac{d x}{d s} + \frac{2 f y d y}{b^2 d s}\right) - \frac{d v}{d t}\right],$$

ou, $d P = g d x + \frac{2 g f y d y}{b^2} - \frac{d s d v}{d t}$;

ou, $d P = g d x + \frac{2 g f y d y}{b^2} - v d v$;

& $P = g x + \frac{g f (y^2 - c^2)}{b^2} + \frac{K^2 u^2}{2} \times \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{X^2}\right)$.

(405.) PROBLÈME II. *Déterminer, pour chaque instant, le moment de la force qui fait tourner le tuyau, en supposant que la vitesse du fluide au*

sortir de l'orifice I, *est uniforme de même que la vîtesse de rotation du tuyau !*

Soit menée la ligne horizontale fixe BS; par cette ligne & par la ligne horizontale Bl, qui tourne circulairement autour du point B, je fais passer un plan, lequel est horizontal, comme on voit ; & je suppose que du point M tombe sur ce plan la verticale MQ; du point Q, j'abaisse QS perpendiculaire à BS; & je tire QB qui est égale & parallèle à MP. Je garde les dénominations précédentes, & je fais de plus $BS = p$; $SQ = q$; l'angle $QBl = z$; l'angle de rotation uniforme $lBS = \xi$, lequel donne $dd\xi = 0$.

Cela posé, quelle que soit la force accélératrice, qui anime la petite masse d'eau Xds, qui répond à l'élément Mm; cette force peut être décomposée en trois autres forces, dirigées parallèlement aux coordonnées BS, SQ, QM. Je néglige la dernière, comme ne pouvant produire aucun moment relativement à l'axe AB auquel elle est parallèle. Les deux premières, qui ont pour valeur respective, $Xds \times \frac{ddp}{dt^2}$, $Xds \times \frac{ddq}{dt^2}$, peuvent être décomposées chacune en deux autres, l'une dirigée suivant PM, l'autre perpendiculaire à PM. Les deux forces dirigées suivant PM doivent être négligées : celles qui sont perpendiculaires à PM, produisent

la résultante $X\,d\,s\left[\frac{d\,d\,q}{d\,t^2}\text{ cos. }(\xi+\zeta)\right.$ $\left.-\frac{d\,d\,p}{d\,t^2}\text{ sin. }(\xi+\zeta)\right]$, laquelle étant censée pousser horizontalement l'eau dans le sens $l\,k$, occasionne une réaction égale & contraire, qui fait tourner le tuyau dans le sens $k\,l$. Ainsi, le moment de cette réaction élémentaire est $y\,X\,d\,s$ $\times\left[\frac{d\,d\,p}{d\,t^2}\text{ sin. }(\xi+\zeta)-\frac{d\,d\,q}{d\,t^2}\text{ cos. }(\xi+\zeta)\right]$, & par conséquent, l'intégrale de cette quantité sera le moment cherché. Or, $p=y\text{ cos. }(\xi+\zeta)$; $q=y\text{ sin. }(\xi+\zeta)$; d'où résulte $d\,d\,p$ $\times\text{sin.}(\xi+\zeta)-d\,d\,q\text{ cos.}(\xi+\zeta)=-2\,dy$ $\times(d\,\xi+d\,\zeta)-y\,d\,d\,\zeta$. De plus, on a les équations, $d\,t=\frac{b\,d\,\xi}{V}$, ou $\frac{d\,\xi}{d\,t}=\frac{V}{b}$; $d\,t=\frac{d\,s}{v}=\frac{X\,d\,s}{K\,u}$; $d\,s=\frac{K\,u\,d\,t}{X}$; $y\,d\,\zeta=-m\,n=-d\,s\text{ sin. }\lambda=-\frac{K\,u\,d\,t}{X}$ $\times\text{ sin. }\lambda$, ou $\frac{d\,\zeta}{d\,t}=-\frac{K\,u\text{ sin. }\lambda}{y\,X}$. Par conséquent le moment élémentaire de la réaction de l'eau deviendra, $-K\,u\left[\frac{2\,V\,y\,d\,y}{b}\right.$ $-$ $\left.K\,u\left(\frac{2\,y\,d\,y\text{ sin. }\lambda}{y\,X}+y^2\,d\left(\frac{\text{sin. }\lambda}{y\,X}\right)\right)\right]$, dont l'intégrale est, $-K\,u\left[\frac{V\,y^2}{b}-\frac{K\,u\,y^2\text{ sin. }\lambda}{y\,X}\right]$ $+C$. Cette intégrale doit s'évanouir, lorsque

$y = c$, $X = M$; & fin. $\lambda = 0$, à cauſe que le premier côté de la courbe $h\,M\,l$ eſt ſuppoſé vertical; elle doit recevoir ſa valeur complète, lorſque $y = b$, $X = K$; & fin. $\lambda = 1$, à cauſe que l'eau eſt ſuppoſée ſortir horizontalement par l'orifice l. Ainſi, le moment demandé eſt $K\,u\left[\frac{V\,c^2}{b} - V\,b + u\,b\right]$, ou $2\,g\,.K\left[b\,r - \left(\frac{b^2 - c^2}{b}\right)\sqrt{f\,r}\right]$..

(406.) Corollaire I. On trouvera le temps d'une révolution entière de la machine, en intégrant l'équation $d\,t = \frac{b\,d\xi}{V}$, de manière que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $\xi = 0$, & reçoive ſa valeur complète, lorſque $\xi = 360^d$. Ce temps eſt donc $\frac{2\,b\,m}{V}$, ou $\frac{2\,b\,m}{\sqrt{2\,g\,f}}$, m exprimant le rapport de la circonférence au diamètre.

(407.) Corollaire II. Tous les tuyaux $C\,D\,F\,E$ étant égaux, ſemblables & ſemblablement diſtribués autour de l'axe de la machine, l'expreſſion du moment de la réaction de l'eau pour un tuyau, repréſentera le moment de la réaction de l'eau contre tous les tuyaux, ſi l'on ſuppoſe que la lettre K, au lieu d'exprimer ſimplement comme elle a fait juſqu'ici, l'orifice l d'un tuyau, exprime maintenant la ſomme de ces orifices pour tous les tuyaux.

Nous attribuerons toujours, dans le reste de ce chapitre, cette même valeur à K. Pareillement, nous entendrons par M la somme de toutes les sections supérieures CD des tuyaux.

(408.) COROLLAIRE III. Nommons Q la quantité constante d'eau que le réservoir immobile $IMIM$, (*Fig. 67.*) fournit, en une seconde, à la somme de tous les tuyaux, qui la versent par les orifices a, b, c, &c : supposons que la hauteur parcourue par un corps grave, pendant la première seconde de sa chute, soit 15 pieds; & que toutes les mesures linéaires, contenues dans nos formules, soient exprimées en pieds. Nous aurons (201), $Q = 2K\sqrt{15r}$; ou $K = \frac{Q}{2\sqrt{15r}}$. Substituant cette valeur dans le moment total de la réaction de l'eau, il deviendra, $\frac{gQ}{\sqrt{15}}\left[b\sqrt{r} - \frac{(l^2 - c^2)}{b}\sqrt{f}\right]$.

(409.) PROBLÈME III. *Trouver l'expression générale de l'effet de la machine !*

Soit Π la masse ascensionnelle, dont la quantité de mouvement exprime l'effet de la machine. Le produit de cette masse par la gravité g & par son bras de levier que je nomme R, compose le moment $g\,\Pi \times R$, qui devient $g\,\Pi \times \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$, en nommant k la hauteur dûe à la vîtesse de Π, & observant qu'on a, $b : R :: \sqrt{f} : \sqrt{k}$,

ou $R = \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$. Égalons ce moment à celui de la réaction de l'eau que nous venons de trouver; nous aurons pour l'expression cherchée :

$$\text{(A)}\ \Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}}\left[\sqrt{fr} - \frac{(b^2 - c^2)}{b^2} f\right].$$

(410.) PROBLÈME IV. *Déterminer la hauteur f dûe à la vîtesse de rotation uniforme de la machine, pour que l'effet de cette machine soit un* maximum !

Soient, outre les dénominations précédentes qui subsistent toujours, l la hauteur constante de l'eau dans le réservoir fixe $IMIM$ au-dessus des orifices inférieurs G des conduits NG; G la somme des aires de ces orifices; H la hauteur totale ZO de la machine, ou la somme des hauteurs du réservoir fixe & des tuyaux mobiles; μ l'angle de chaque conduit NG avec l'horizon. On aura ces différentes équations (402, 403, 201):

$$\text{I. } r = \left[h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)\right] \times \frac{M^2}{M^2 - K^2}.$$

$$\text{II. } l = \frac{rK^2}{M^2} + \frac{fc^2}{b^2}.\ \text{III. Tang. } \mu = \frac{bK\sqrt{r}}{cM\sqrt{f}}.$$

$$\text{IV. } Q = 2K\sqrt{15r}.\ \text{V. } Q = 2G\sqrt{15l}.$$

$$\text{VI. } H = h + l.$$

Faisons, pour abréger un peu, $1 - \frac{c^2}{b^2} = n$.

En donnant une autre forme à l'équation II, on trouvera $\frac{M^2}{M^2 - K^2} = \frac{r}{r - l + f - nf}$.

Subſtituant cette valeur dans l'équation I, on aura $r - l + f - nf = h + nf$; ou (à cauſe de $H = h + l$), $r = H - f + 2nf$. Mettons cette valeur de r dans l'équation (A), & nous aurons

$$(B)\ \pi \sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}} [\sqrt{(Hf - f^2 + 2nf^2)} - nf].$$

Maintenant, pour obtenir le *maximum* cherché, il faut différencier cette équation, en ne faiſant varier que f, & égaler la différencielle à zéro. Par-là, on trouvera, $\frac{\frac{1}{2}H - f(1 - 2n)}{\sqrt{[Hf - f^2(1 - 2n)]}} - n = 0$; ou $[\frac{1}{2}H - f(1 - 2n)]^2 = n^2 [Hf - f^2(1 - 2n)]$. Or, il eſt aiſé de voir que tous les termes de cette équation, ſe détruiſent mutuellement en faiſant $H = 2f - 2nf$. Ainſi, $f = \frac{H}{2(1 - n)}$; &, à cauſe de $r = H - f + 2nf$, on aura auſſi, $r = \frac{H}{2(1 - n)}$. D'où il ſuit que la vîteſſe de rotation uniforme de la machine, & celle avec laquelle l'eau s'échappe continuellement par les orifices a, b, c, &c, ſont égales entr'elles; & que la hauteur dûe à chacune de ces vîteſſes eſt $\frac{H}{2(1 - n)}$. On voit de plus que ces deux vîteſſes étant contraires, la vîteſſe de l'eau immédiatement au ſortir des orifices a, b,

b, c, &c, eſt nulle dans l'eſpace abſolu; & que par conſéquent, l'eau tombe alors verticalement.

Subſtituons pour f cette même valeur $\frac{H}{2(1-n)}$ dans l'équation (B), & nous aurons pour l'expreſſion du plus grand effet de la machine, $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q.H}{2\sqrt{15}}$.

(411.) COROLLAIRE. I. A meſure que le nombre n diminue, la hauteur f ou r diminue. Soit $n = 0$, c'eſt-à-dire, $1 - \frac{c^2}{b^2} = 0$, ou $c = b$: la valeur de f ou de r ſera $\frac{H}{2}$. Dans cette ſuppoſition, les droites $A h$, $B l$, (*Fig. 68*) ſont égales, & on a la facilité de faire les ouvertures ſupérieures $C D$ des tuyaux, plus grandes que les orifices l, comme cela doit être en effet (402). Fig. 68.

(412.) COROLLAIRE II. Si l'on met pour r & f leur valeur commune $\frac{H}{2(1-n)}$, dans les équations $Q = 2 K \sqrt{15 r}$, $\frac{M^2}{M^2 - K^2} = \frac{r}{r - l + f(1-n)}$, & qu'on dégage K & M, on trouvera $K = \frac{Q\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{30}.\sqrt{H}}$; $M = \frac{Q}{\sqrt{30}.\sqrt{(2l-H)}}$. Donc, $K : M :: \sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2l-H)} : \sqrt{H}$. Par où

l'on voit que la hauteur l du vase immobile
Fig. 67. $IMIM$ (*Fig. 67*) ne peut pas être moindre que la moitié de H.

Si l'on faisoit $2l = H$, l'orifice K feroit infiniment petit ; ce qui ne peut pas avoir lieu à la rigueur. Soit donc $l = \theta H$, θ étant une fraction moindre que l'unité : on aura, $K : M :: \sqrt{(1 - n)} . \sqrt{(2\theta - 1)} : 1$. Sur quoi il faut se souvenir que la fraction θ doit toujours avoir une valeur, telle que K soit sensiblement moindre que M.

Maintenant, l'équation III donne tang. $\mu = \frac{b\sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2\theta-1)}}{c}$; l'équation V donne $G = \frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{\theta H}}$; & enfin l'équation VI donne $h = H(1 - \theta)$.

Ainsi, on a tous les élémens nécessaires pour construire la machine, en observant, 1.° que les
Fig. 68. largeurs Bl, Ah (*Fig. 68*) doivent être telles qu'on puisse donner à M & à K les dimensions convenables, lesquelles sont subordonnées à la hauteur H de la machine, & à la quantité d'eau Q qui doit être employée à la mouvoir ; 2.° que la différence des rayons AC, AD, ne soit pas fort grande, afin que la différence des forces centrifuges des particules d'eau, sur la largeur des tuyaux mobiles, ne change pas sensiblement les résultats précédens, où l'on a fait répondre toutes les forces centrifuges à la courbe moyenne

h M l; 3.° que la ſomme des orifices *G* ſoit ſenſiblement moindre que la ſomme des orifices *M*, parce qu'on a ſuppoſé dans le calcul que le mouvement de l'eau, dans chaque tuyau *CDFE*, commençoit en *CD*.

(413.) Scholie. En comparant le plus grand effet de ces ſortes de roues (410) au plus grand effet des roues à pots (393), on voit que ſi la hauteur *OZ* (H) de la roue mue par la réaction de l'eau (*Fig. 67*), eſt égale à la hauteur *FV* de l'eau, qui agit ſur la roue à pots (*Fig. 65*), on voit, dis-je, que ces deux effets ſeront égaux pour une même quantité d'eau *Q* dépenſée. Mais comme les roues mues par la réaction de l'eau, demandent à être exécutées avec beaucoup de préciſion dans toutes leurs parties, pour bien produire leur effet; & que d'ailleurs, tout le poids de l'eau contenue à chaque inſtant dans les tuyaux mobiles, porte ſur la tête du tourillon inférieur adapté à l'arbre, ce qui occaſionne un frottement de même nature que celui d'un plan mobile circulairement ſur un autre plan : on trouve qu'en mêmes circonſtances les roues à pots doivent être préférées. Mais, il y a des cas où les roues mues par la réaction de l'eau, pourroient être ſubſtituées avec avantage aux roues mues par le choc de l'eau.

CHAPITRE XIX.

Théorie du mouvem entde l'eau dans les tuyaux de pompe.

(414.) Nous avons expliqué (*Hydrost. Chap. VII & VIII*) le mécanifme des pompes; & nous avons en même temps déterminé la pofition & la hauteur de l'efpace où le pifton doit jouer, afin que la preffion de l'atmofphère, mife en activité, obtienne fon effet. Il s'agit maintenant de fuivre le mouvement de l'eau dans les tuyaux de pompe. Ce problème important a fourni le fujet de plufieurs Écrits. Il a même fait naître, entre quelques Auteurs, des difcuffions fur le choix des principes qu'il convient d'employer pour le réfoudre : car le grand nombre d'élémens qu'il renferme, l'impoffibilité de les foumettre tous à un calcul rigoureux, & l'influence plus ou moins grande que chacun d'eux peut avoir fur le réfultat, laiffent aux Géomètres la liberté d'adopter les hypothèfes, qui leur paroiffent les plus propres à repréfenter les principaux mouvemens de ces machines. Ici je me contenterai d'expofer ma méthode, fans prétendre exclure aucune autre manière d'envifager la queftion. Je ne confidérerai même que la fimple

pompe aſpirante ; mais ce que j'en dirai s'appliquera facilement aux autres eſpèces de pompes.

(415.) Reprenons d'abord, pour un moment, la *Figure 37* de l'Hydroſtatique, laquelle repréſente une pompe aſpirante ordinaire. La preſſion de l'atmoſphère, ſur la ſurface *MN* du réſervoir, oblige l'eau à monter par le tuyau d'aſpiration & à ſuivre le piſton, quand il s'élève de *GH* en *KI*. Si la vîteſſe du piſton eſt plus grande que celle de l'eau ſubſéquênte, il ſe fera un vide entre le piſton & l'eau ; ſi au contraire la vîteſſe du piſton eſt moindre que celle de l'eau, cette eau pouſſera le piſton de bas en haut, & cette preſſion ne ceſſera que dans le cas où les deux vîteſſes deviendront égales. Or, 1.° lorſqu'il ſe forme un vide entre l'eau & le piſton, le temps employé à parcourir la hauteur de ce vide eſt perdu quant à l'effet de la machine ; 2.° lorſque la vîteſſe de l'eau, à l'endroit *KI* où répond la limite ſupérieure de la courſe du piſton, eſt plus grande que celle du piſton arrivé à cette limite, le piſton venant à deſcendre repouſſe l'eau, au moins ſur l'étendue de la couronne qui environne le trou de la ſoupape mobile ; ce qui occaſionne de même une perte de forces. De-là il ſuit que les dimenſions de la pompe, la vîteſſe du piſton & celle de l'eau doivent être tellement réglées que ces deux inconvéniens ſoient ſauvés, du moins autant qu'il eſt poſſible.

(416.) PROBLÈME I. *Déterminer la vîtesse avec laquelle l'eau s'élève librement dans le corps de pompe, quand on y a fait le vide; c'est-à-dire, dans l'hypothèse où la vîtesse du piston est plus grande que celle de l'eau subséquente dans le vide!*

La pression de l'atmosphère sur la surface du réservoir d'où l'eau est élevée, peut être regardée comme le poids d'une colonne d'eau de trente-deux pieds de hauteur; je néglige le poids de la soupape dormante *E*, ou je le déduis de celui de la colonne de pression. Alors le problème proposé est le même que s'il s'agissoit de déterminer la vîtesse avec laquelle l'eau s'élève dans un cylindre qui y est plongé verticalement à une profondeur donnée, & qui étant ouvert par en haut, est fermé vers le bas par une cloison où il y a une ouverture qui laisse entrer l'eau dans le cylindre.

Fig. 69. Soit donc en général un vase *V M N T* (*Fig. 69*), percé à l'endroit *M N* d'une ouverture *p q*, & plongé verticalement dans le fluide *B K D F* qui y entre par l'orifice *p q*. Je prends pour principe, ou pour hypothèse, qu'à l'instant où l'on ouvre l'orifice *p q*, les deux portions de fluide *A B P M*, *C F Q N*, agissent sur le fluide inférieur *P K D Q*, comme feroient deux pistons qui seroient appliqués sur les ouvertures *P M*, *Q N* d'un vase *P K D Q*, & qui tendroient à faire sortir le fluide par l'orifice *p q*.

En conséquence de ces pressions, le fluide s'élève dans le vase $VMNT$, sans cesser de former un même tout avec le reste de la masse. La portion inférieure d'eau $PKDQ$ peut être regardée comme stagnante, & comme servant simplement de véhicule à l'effort des pressions sur PM & QN, pour faire monter l'eau dans le vase $VMNT$. Je ne considère donc que deux mouvemens dans le fluide, l'un descensionnel dans les parties $ABPM$, $CFQN$; l'autre ascensionnel dans la partie $MNIG$; & je vais chercher une équation qui exprime les conditions de l'équilibre, entre les mouvemens perdus & les mouvemens gagnés.

Imaginons que le fluide extérieur $ABPM + NCFQ$, & le fluide intérieur $GMNI$, soient partagés chacun en une infinité de tranches horizontales égales, représentées par $Hufh + Xzcx$, & par $OLlo$; & supposons que toutes ces tranches, descendantes ou ascendantes, conservent leur parallélisme.

Soient:

la gravité	....	$= g$,
la verticale Sp	....	$= p$,
Rp	....	$= z$,
Ep	....	$= q$,
Yp	....	$= x$,
l'aire exprimée par la ligne GI	.....	$= M$,
l'aire exprimée par OL	....	$= y$,
l'aire de l'orifice pq	....	$= K$,
l'aire exprimée par $BA + CF$	.....	$= P$,

Soient $\left\{\begin{array}{ll} \text{l'aire exprimée par } PM + NQ \ldots\ldots & = Q, \\ \text{l'aire exprimée par } Hu + zX \ldots\ldots & = s, \\ \text{la viteſſe de } OL \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = v, \\ \text{la viteſſe à l'orifice } pq \ldots\ldots\ldots\ldots & = u, \\ \text{la viteſſe de la ſection } Hu + zX \ldots & = V, \\ \text{l'élément du temps} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = dt, \\ \text{la hauteur dûe à la viteſſe } u \ldots\ldots\ldots & = r. \end{array}\right.$

Il eſt clair que le fluide deſcendant, animé dans chacune de ſes tranches, de la vîteſſe $g\,dt - dV$, doit faire équilibre à chaque inſtant au fluide intérieur & aſcendant, animé dans chacune de ſes tranches, de la vîteſſe $g\,dt + dv$. On aura donc l'équation

$$\int dz\,(g\,dt - dV) = \int dx\,(g\,dt + dv),$$

ou bien

$$(A)\quad \int dz\,(g\,dt - dV) - \int dx\,(g\,dt + dv) = 0.$$

Or $v = \frac{Ku}{y}$, $dv = \frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$,

$V = \frac{Ku}{s}$, $dV = \frac{K(s\,du - u\,ds)}{ss}$;

$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dz}{V} = \frac{y\,dx}{Ku} = \frac{s\,dz}{Ku}$.

L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{g\,s\,dz}{Ku}\int dz - K\,du\int\frac{dz}{s} + Ku\,s\,dz \int\frac{ds}{s^3} - \frac{g\,y\,dx}{Ku}\int dx - K\,du\int\frac{dx}{y} + Ku\,y\,dx\int\frac{dy}{y^3} = 0.$$

Les intégrations indiquées doivent être effectuées pour les hauteurs entières p & q. Ainsi $\int dz = p$, $\int dx = q$. Soient pour les mêmes hauteurs, $\int \frac{dx}{y} = N$, $\int \frac{dz}{s} = N'$.

De plus remarquons que l'intégrale $\int \frac{dy}{y^3}$ doit s'évanouir lorsque $y = M$, & recevoir sa valeur complette lorsque $y = K$; que pareillement l'intégrale $\int \frac{ds}{s^3}$ doit s'évanouir lorsque $s = P$, & recevoir sa valeur complette lorsque $s = Q$. Remarquons encore que $Ee\ (dq)$ étant la hauteur de la tranche $GIig$, on a $y\,dx = s\,dz = M\,dq$. Sur toutes ces considérations, notre équation deviendra

$$(B)\ \frac{M(p-q)\,dq}{K} - K(N + N')\,dr + M.K.r\,dq\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0.$$

Il y a dans cette équation trois indéterminées, savoir, p, q, r; mais comme on a évidemment $Mdq = -Pdp$, & que les figures des vases sont données, il est clair qu'on aura p en q. Ainsi l'équation (B) se changera en une autre, où il n'y aura plus de variables que r & q & leurs différences, & d'où l'on tirera par conséquent la valeur de r en q, ou de q en r.

(417.) COROLLAIRE I. Supposons que $VMNT$ soit un cylindre vertical ; & que $BKDF$ soit aussi un vase prismatique, dans lequel la hauteur de l'eau demeure constante, ce qui est le cas de la nature, puisque la pression de l'atmosphère, sur la surface du réservoir, est toujours sensiblement la même. Alors, dans l'équation (B), les quantités M & p sont constantes ; $N = \frac{q}{M}$; $N' = \frac{p}{P}$; le terme $M.K.r\,dq\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$ est zéro ; & par conséquent on aura :

$$(C)\ \frac{M(p-q)\,dq}{K} - \frac{K.q\,dr}{M} - \frac{Kp\,dr}{P}$$
$$+ M.K.r\,dq\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

Équation qui étant de la même nature que celle de l'article 230, s'intègre de même.

(418.) COROLLAIRE II. Si dans cette équation (C), l'orifice K est sensiblement moindre que M & P, on aura à-peu-près, $r = p - q$. Ainsi, l'expression de la vîtesse du fluide à son passage par l'orifice mn est $\sqrt{[2g(p-q)]}$, & l'expression de sa vîtesse en GI est $\frac{K}{M}$ $\sqrt{[2g(p-q)]}$.

On doit se souvenir que par K il faut toujours entendre l'orifice diminué, dans le rapport que demande la contraction de la veine fluide (190).

(419.) SCHOLIE. Si dans le problème précédent, au lieu de ſuppoſer que l'écoulement ſe fait du vaſe *BKDF* dans le vaſe *VMNT*, on ſuppoſe au contraire, que le vaſe *VMNT* contienne de l'eau au-deſſus du niveau *BF* & ſe vide dans le vaſe *BKDF*: la queſtion ne changera pas de nature. Mais, au lieu de l'équation (A), on aura l'équation :

$$(D) \int dx\,(g\,dt - dv) - \int dz\,(g\,dt + dV) = 0:$$

Sur laquelle on fera des remarques & des opérations analogues à celles qu'on a faites ſur l'équation (A). On voit qu'ici p ſera $< q$, au lieu qu'auparavant p étoit $> q$.

(420.) PROBLÈME II. *Soit* VZYT (Fig. 70) *un tuyau de pompe aſpirante, dont le* Fig. 70.
piſton monte de GH *en* KI *avec une vîteſſe moindre que ne ſeroit celle de l'eau qui le ſuit, ſi elle montoit librement : on demande la preſſion que cette eau exercera de bas en haut contre la tête du piſton, dans l'hypothèſe où l'ouverture* pq *de la ſoupape dormante* E *eſt ſenſiblement moindre que la ſection horizontale* MN *du corps de pompe ?*

Soient *OL* une poſition indéterminée du piſton; *ZY*, la ſurface du réſervoir dans lequel la pompe eſt plongée; *AZ*, la hauteur conſtante de la colonne d'eau dont la preſſion eſt équivalente à celle de l'atmoſphère ſur *ZY*. Suppoſons, comme

ci-devant, la gravité $= g$; l'aire de la section $MN = M$; l'aire de l'orifice $pq = K$. Supposons de plus, $AK = c$; $AG = f$; $AO = x$; la hauteur dûe à la vîtesse ascensionnelle du piston $= r$.

Maintenant, si le piston n'opposoit point de résistance à l'ascension de l'eau qui le suit, la hauteur dûe à la vîtesse de l'eau en pq seroit x (418); & par conséquent la hauteur dûe à la vîtesse de la tranche d'eau OL seroit $\frac{K^2 x}{M^2}$, les vîtesses des tranches de l'eau étant en raison inverse de leurs largeurs. Donc, puisque l'eau en OL, est obligée de prendre la vîtesse du piston, c'est-à-dire, une vîtesse dûe à la hauteur r; & que d'un autre côté la pression de l'eau contre chaque point de la tête du piston est évidemment égale au produit de la gravité par la différence des hauteurs $\frac{K^2 x}{M^2}$, r: il s'ensuit que les pressions contre la tête entière du piston, en OL, en GH, en KI, seront respectivement, $g\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right) \times M$, $g\left(\frac{K^2 f}{M^2} - r\right) \times M$, $g\left(\frac{K^2 c}{M^2} - r\right) \times M$.

(421.) COROLLAIRE. Si l'on veut que la pression en KI s'évanouisse, on aura $g\left(\frac{K^2 c}{M^2} - r\right) \times M = 0$, ou $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r}{c}$;

& si l'on veut que la pression en $K I$ soit égale à une quantité donnée $g\,h\,M$, on aura $\frac{K^2}{M^2}$ $= \frac{r + h}{c}$.

(422.) PROBLÈME III. *Tout étant d'ailleurs le même que dans le problème précédent, on suppose que la colonne d'eau* VOLT *que le piston soulève, se dégorge continuellement par en haut à l'endroit fixe* VT, *& on demande une équation qui exprime les conditions du mouvement ascensionnel du piston !*

Supposons qu'outre la pression de l'eau qui pousse le piston de bas en haut, on lui applique encore dans le même sens une force que je représente par le poids d'une colonne d'eau dont la base $= M$, & la hauteur $= z$. Le piston sera poussé de bas en haut par une force $= g\,M\,z$ $+ g\,M\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right)$; mais il sera repoussé de haut en bas: 1.° par son propre poids que je représente par celui d'une colonne d'eau dont la base $= M$, & la hauteur donnée $= a$; 2.° par le poids de la colonne d'eau $OLTV$, lequel $= g\,M\,(x + k)$, en nommant k la hauteur donnée VA; 3.° par la pression de l'atmosphère sur la surface VT, laquelle pression $= g\,M.H$, en nommant H la hauteur donnée AZ. Ainsi, la force absolue qui fait monter le piston est simplement, $g\,M\,z + g\,M\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right)$

$-gMa - gM(x+k) - gM.H.$ Or, cette force meut la masse $Ma + M(x+k)$; donc, par la formule $m v d v = F d s$ des forces accélératrices, on aura

$$(a+x+k)\,dr = -dx\left(z + \frac{K^2 x}{M^2} - r - a - x - k - H\right).$$

Cette équation contient trois variables, r, x, z: connoissant donc l'une de ces variables, ou la relation de deux d'entr'elles, on connoîtra la relation des trois.

(423.) COROLLAIRE. Supposons que le piston monte uniformément, on aura $dr = 0$, & notre équation donnera, $z = H + k + a + r + \frac{x(M^2 - K^2)}{M^2}$.

Supposons de plus que la vîtesse du piston soit telle, que la pression de l'eau s'évanouisse quand il arrive en KI: on aura (421), $r = \frac{K^2 c}{M^2}$. Donc $z = H + k + a + \frac{K^2 c + x(M^2 - K^2)}{M^2}$.

On voit que la hauteur z est variable. Faisant successivement $x = c$, $x = f$, & nommant Z, Z', les valeurs correspondantes de z, on aura

$$Z = H + k + a + c,$$

$$Z' = H + k + a + f - \frac{(f-c)K^2}{M^2}.$$

Dans la pratique, il faudra prendre la valeur de z, moyenne entre Z & Z'.

EXEMPLE. Suppoſons AZ ou $H = 32$ pieds; AV ou $k = 4$ pieds; $a = 2$ pieds; AO ou $c = 7$ pieds; AG ou $f = 9$ pieds; le diamètre du corps de pompe $=$ 6 pouces; celui de l'ouverture $pq =$ 2 pouces $\frac{1}{2}$. On trouvera, $\frac{K}{M} = \frac{25}{144}$; $\frac{K^2}{M^2} = \frac{625}{20736}$; $r =$ 2 pouces 6 lignes $\frac{1}{3}$; $Z =$ 45 pieds; $Z' =$ 46 pieds 11 pouces 4 lignes. Or, 1.° la valeur de r donne, pour le piſton, une vîteſſe aſcenſionnelle uniforme, de 3 pieds 6 pouces $\frac{2}{3}$, par ſeconde. Ainſi le piſton parcourra la hauteur GK de ſon jeu, qui eſt de 2 pieds, en trente-trois tierces $\frac{3}{4}$ à peu-près; & durant ce même temps, il ſortira par la bouche VT, un cylindre d'eau qui a 6 pouces de diamètre & 2 pieds de hauteur, ce qui donne 679 pouces cubes. Si donc l'on ſuppoſe que le piſton emploie le même temps à deſcendre qu'à monter, on voit que dans une minute le piſton montera 53 fois $\frac{1}{3}$, & que par conſéquent il ſortira par VT, 36213 $\frac{1}{3}$ pouces cubes d'eau; ce qui forme un poids d'environ 1467 livres, à raiſon de 70 livres le pied cube. Ce poids eſt élevé à la hauteur ZV qui eſt de 36 pieds; l'effet eſt donc le même que ſi un poids de 52812 livres étoit élevé à la hauteur d'un pied en une minute.

2.° En prenant 45 pieds 11 pouces 8 lignes pour la hauteur moyenne de la colonne d'eau dont le poids eſt équivalent à la force qui doit pouſſer le piſton de bas en haut, on trouvera que cette colonne, qui eſt un cylindre de 6 pouces de diamètre ſur 45 pieds 11 pouces 8 lignes de hauteur, forme un poids d'environ 632 livres ; ce poids parcourt 53 $\frac{1}{3}$ fois 2 pieds, en une minute : résultat qui eſt le même que ſi un poids de 67412 livres étoit élevé à la hauteur de 1 pied en 1 minute. Ce poids comprend deux parties, l'une relative à l'élévation de l'eau, l'autre à l'élévation de la maſſe du piſton. A quoi il faudra ajouter encore la force néceſſaire pour vaincre le frottement.

S'il n'étoit queſtion que de ſoutenir le piſton dans le ſimple état d'équilibre, la hauteur de la colonne d'eau équivalente à l'effort néceſſaire, au lieu d'être de 45 pieds 11 pouces 8 lignes, ſeroit ſimplement de 38 pieds (75).

(424.) PROBLÈME IV. *Le piſton ayant été élevé à ſa plus grande hauteur* K I, *& venant enſuite à deſcendre, on demande la vîteſſe avec laquelle il deſcendra ?*

Lorſque le piſton commence à deſcendre, la ſoupape dormante *E* ſe ferme, & la ſoupape mobile *F* s'ouvre. Alors la colonne d'eau *VMNT* peut être conſidérée comme une eau dormante ; dans laquelle le piſton deſcend en vertu d'une

force

force qui eſt égale à l'excès de ſon poids abſolu ſur le poids du fluide qu'il déplace, & ſur la réſiſtance qu'il éprouve en frappant l'eau ſur toute l'étendue de la couronne qui environne l'ouverture de la ſoupape *F*. A quoi l'on peut ajouter une force extérieure, qui pouſſera encore le piſton de haut en bas, ſi l'on veut accélérer ſa vîteſſe. Dans l'une & l'autre hypothèſe, la recherche de cette vîteſſe eſt un problème de même nature que celui de l'article 352. Nos lecteurs achèveront donc facilement la ſolution.

Comme la hauteur d'où tombe le piſton n'eſt jamais fort grande, la réſiſtance qu'il éprouve en frappant l'eau, par ſa vîteſſe acquiſe, peut le plus ſouvent être négligée; & alors l'expreſſion de la vîteſſe eſt fort ſimple. D'un autre côté, en augmentant de plus en plus l'ouverture de la ſoupape, on fait encore diminuer la réſiſtance; mais cela peut avoir l'inconvénient de rendre la ſoupape peu fidèle, trop maſſive & trop lente au mouvement.

FIN

ERRATA.

Page 7, *ligne* 24, $P = \frac{p}{G}$ lisez $p = \frac{P}{G}$

16, *lig.* 3, *après le mot* élémens, *ajoutez*, passant par leurs centres de gravité, & toutes dirigées du dehors au-dedans, ou du dedans au-dehors

39, *lig.* 11, $b\,d$ lis. $c\,d$

41, *lig.* 6, $\int - \frac{\varpi x\,dx}{a}$ lis. $\int \frac{\varpi x\,dx}{a}$

82, *lig.* 11, f lis. F

99, *lig.* 6 & 8, proportionnelle *lis.* dûe

102, *lig.* 24, $M\,r$ lis. $M\,t$

Ibid. *lig.* 27, $r\,H$ lis. $t\,H$

103, *lig.* 21, $A\,z$ lis. $A\,u$

118, *lig.* 2, exprimée *lis.* exprimées

Ibid. *lig.* 4, le *lis.* la

123, *lig.* 1, même *lis.* ou

124, *lig.* 11, différence *lis.* différences

137, *lig.* 22, s'est *lis.* se sont

157, *lig.* 3, $(\sin. n)^2$ lis. $(c \sin. x)^2$

167, *lig.* 5, MIN lis. MIN,

169, *lig.* 4 & 5, $\frac{pb}{a}$ lis. $\frac{pb}{\varpi}$

179, *lig.* 21, $z\,n$ lis. $z\,x$

190, *lig.* 6, $d\,d\,z$ lis. $d\,d\,p$

209, *lig.* 9, $\int x \mu\, dM$ lis. $\int \lambda \mu\, dM$

237, *lig.* 23, $C\,D$ lis. $B\,C$

257, *lig.* 14, x lis. $X\,dx$

Ibid. *lig.* 15, $\Pi p (h - x)$ lis. $\Pi p\,dx (h - x)$

259, *lig.* 11, le *lis.* la

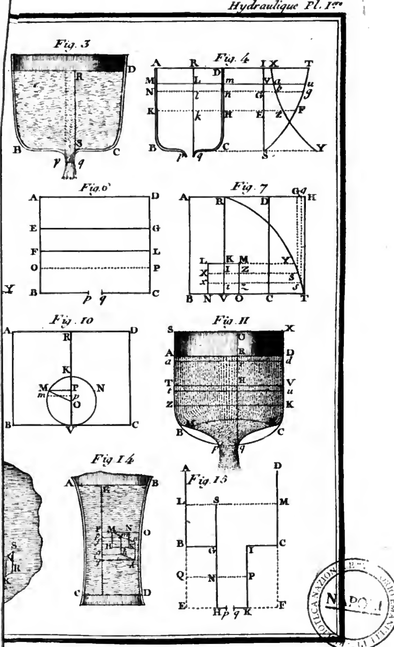
290, *lig.* 1, $A\,B$ lis. $A\,D$

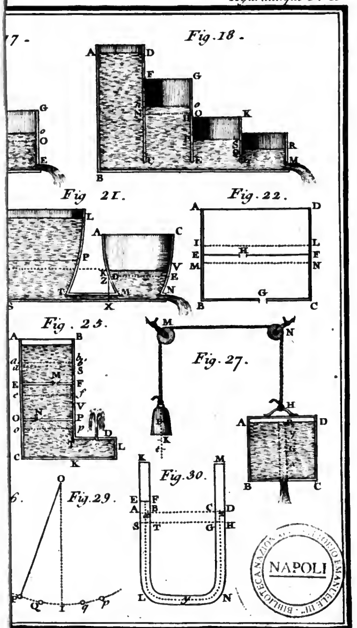
298, *lig.* 10, *au dénominateur, au lieu de* M^2 lis. M

Page 307, *lig.* 23, *au numérateur, au lieu de* p^{1} lis. p^{n}
314, *lig.* 22, $\frac{u}{y}$ lis. $\frac{u}{v}$
318, *lig.* 1, fn lis. gh
Ibid. lig. 2, gh lis. fn
Ibid. lig. 12, troisième *lis.* quatrième
320, *lig.* 14, g lis. $\frac{6}{\theta^{2}}$
322, *lig.* 10, $- dv$ lis. $- \frac{dv}{dt}$
342, *lig.* 13, *après le mot* second *ajoutez*, pourvu néanmoins que l'orifice *G* ne soit pas fort grand.
380, *lig.* 7, *au dénominateur*, lis. 39
394, *lig.* 12, *au dernier terme du numérateur*, lis. $\frac{fQ^{2}}{K}$; *& au dernier terme du dénominateur*, lis. $\frac{fqQ}{K}$
401, *lig.* 6, précédent *lis.* 313
411, *lig.* 16, $aaQds$ lis. $aaQdS$
426, *lig.* 5, que *lis.* que si
430, *lig.* 4, TIA lis. TIO
Ibid. lig. 5, QLC lis. QLS
436, *lig.* 20, FQQ' lis. FQF'
Ibid. lig. 26, PM lis. PF
466, *lig.* 17, *au dernier terme, au lieu de* n *lis.* u
471, *lig.* 27, leur *lis.* lui
487, *lig.* 3, k lis. k^{2}
493, *lig.* 10, GQc lis. GQe
Ibid. lig. 13, QR lis. QT
497, *lig.* 3, *réflexions* lis. *Fluxions*
505, *lig.* 24, mrz lis. Mrz

AVIS AU RELIEUR.

Placez à la page 234 les ſix Planches cotées *HYDROSTATIQUE ;* & à la fin du volume les ſix Planches cotées *HYDRAULIQUE ;* en obſervant de ne pas intervertir l'ordre numérique de ces Planches.


Hydraulique Pl. Ire
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 14
Fig. 15



17.
Fig. 18.
Fig 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 27.
Fig. 30.
6.
Fig. 29.

Fig. 32

Fig. 33

Fig. 37

Fig. 36

Fig. 39

Fig. 40

Fig. 43

Fig. 44

Fig. 45

Fig. 46

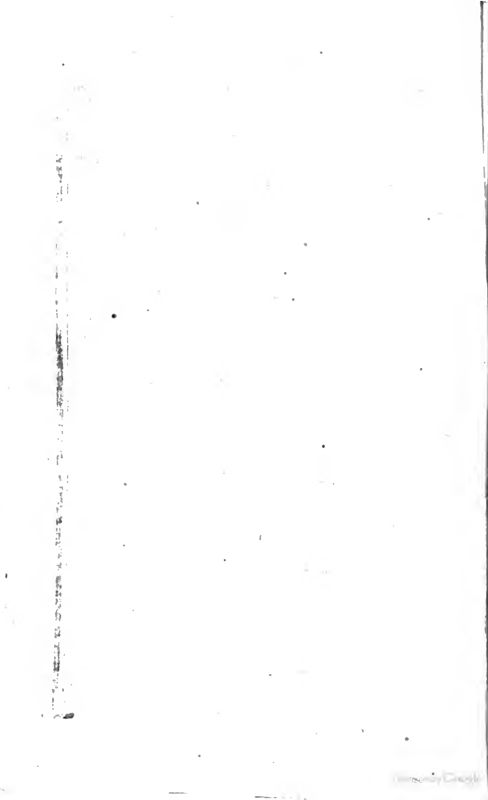


Fig. 48.

Fig. 49.

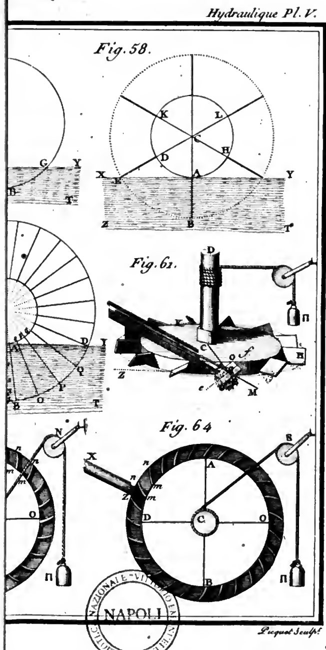
Fig. 51.

Fig. 52.

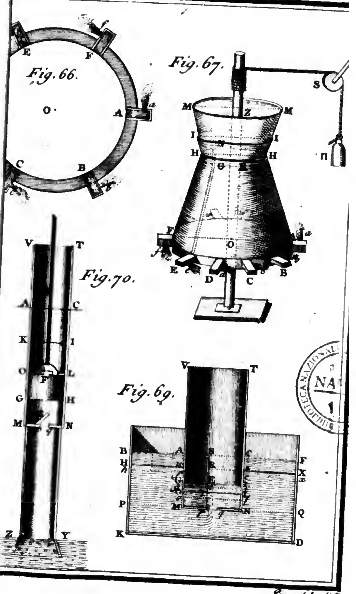
Fig. 54.

Fig. 55.

Picquet Sculp.



Pucquet Sculp.



Juquet Sculp.



